MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2005./2006. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/III, 10001 Zagreb,
tel./fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Naslovnica ovog broja Matematičko-fizičkog lista donosi skicu eksperimenta kojim je dokazana suprafluidnost fermionskog plina. Više o tome možete pročitati na 65. stranici ovog broja Lista te na web stranicama eksperimentalne grupe s Massachusetts instituta za tehnologiju u Bostonu (SAD) koja je provela navedeni eksperiment (**http://cua.mit.edu/ketterle_group/experimental_setup/BEC_I/Portal.html**).

Dragi čitatelji!

Na početku smo nove školske godine u kojoj nas očekuju već uobičajene aktivnosti, a velik dio vas će se iduće godine upisati, nakon priprema za kvalifikacijski ispit, na razne fakutete gdje će nastaviti obrazovanje. Od ove godine studij je u skladu s Bolonjskom deklaracijom. Nadamo se da će u Matematičko-fizičkom listu svi oni koji su sada u srednjoj, pa i osnovnoj školi, a zanima ih matematika i/ili fizika, naći dosta zanimljivosti: razne članke iz matematike, fizike i astronomije, dovoljno zadataka za rješavanje, izvještaje s općinskih, županijskih i državnih natjecanja, s natjecanja "Klokan bez granica" s Mediteranskog matematičkog natjecanja, a na kraju školske godine naši najbolji natjecatelji iz matematike i fizike ići će na međunarodna natjecanja. Na Fakultetu elektrotehnike i računarstva prošle školske godine uveden je izborni kolegij "Bridž", kao i na mnogim stranim sveučilištima. Neki od vas su zasigurno već naučili pravila ove intelektualne igre a u novoj rubrici ćete moći razvijati vještinu ove igre.

Fotonska hipoteza – najrevolucionarniji Einsteinov rad 1905. godine, bila je tema predavanja profesora Dubravka Klabučara, a ujedno i prilog proslavi godine fizike, u Ljetnoj školi mladih fizičara, o čemu voditelj škole, Miroslav Požek, piše u ovom broju a na srednjoj dvostrukoj stranici možete vidjeli slike na kojima su zabilježeni najinteresantniji detalji na susretu većeg broja učenika osnovne i srednje škole i predavača.

Ima i nekoliko članaka iz matematike. Milorad Tomić pripremio je prilog *Jedan način rješavanja jednadžbi četvrtog stupnja*. Dušan Murovec u članku *Male tajne Fibonaccijevih brojeva,* promatrajući njihova svojstva dolazi do zanimljivog Zeckendorfovog teorema. Marko Valčić upoznaje nas s primjenom Jensenove nejednakosti i konveksnih funkcija na dokazivanje raznih nejednakosti u geometriji. Uz detaljna rješenja nekih zadataka navedeno ih je još nekoliko za vježbu. Mladen Halapa daje jednostavnu formulu za površinu tangencijalno-tetivnog četverokuta. Dobitnik ovogodišnje Abelove nagrade, koju dodjeljuje Norveška akademija znanosti, je američki matematičar mađarskog porijekla Peter D. Lax, a zanimljiv prilog o tome je pripremila Sanja Marušić.

Dario Hrupec u članku *Gama-astronomija – posljednji elektromagnetski prozor u svemir* piše o primjeni eletromagnetskih valova u istraživanju svemira.

Nadamo se da ćete naći interesantne zadatke iz zabavne matematike, zadatke iz matematike i fizike (očekujemo da pošaljete što više njihovih rješenja u redakciju lista, a najljepša i najoriginalnija će biti objavljena u jednom od sljedećih brojeva). Tu je i izvještaj s 8. mediteranskog matematičkog natjecanja, s 14. Državnog susreta i natjecanja mladih matematičara Republike Hrvatske (uz nekoliko slika na središnjoj dvostrukoj stranici).

Ante Bilušić u prilogu *Suprafluidno stanje fermionskog plina* upoznaje nas s revolucionarnim eksperimentom koji otkriva zasebnost svijeta kvantne fizike.

Na zadnoj strani omota prisjetili smo se nedavno preminulog prof. Pavla Papića, redovitog profesora na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, kojeg se njegovi slušatelji sjećaju kao vrsnog predavača.

Uredništvo lista



Fotonska hipoteza – najrevolucionarniji Einsteinov rad 1905. godine[1]

Dubravko Klabučar[2]*, Zagreb*

Fotonska hipoteza i fotoelektrični efekt

Ova godina je proglašena svjetskom godinom fizike u čast stogodišnjice Einsteinove "čudesne godine" 1905. U raspravama koji je od njegovih pet fundamentalnih radova [1–5] iz te godine značajniji, većina bi se fizičara, bez obzira na svoje glavno područije interesa, vjerojatno složila s ocjenom Franka Wilczeka, Nobelovca za 2004. godinu. On je ocijenio [6] da Einsteinov rad o Brownovom gibanju [3] zaslužuje solidnu, za rad o kvantima svjetlosti [1] jaku, a za rad o specijalnom relativitetu [4] i relaciju $E = mc^2$ [5] super-jaku Nobelovu nagradu.

Međutim, ako se razmatra koji je od tih radova bio revolucionarniji, poredak bi bio drugačiji. Što je naime to, što neki znanstveni rad čini revolucionarnim? Jasno je da on mora iznijeti neku originalnu veliku ideju, koja mora izdržati test vremena i postati osnova ili važan dio širokih područja znanosti. Međutim, za revolucionarnost je potrebno [7] i to, da se ta velika ideja ne protivi samo prihvaćenim idejama tog vremena, nego je odbacuju čak i vrhunski znanstvenici sve dok je nisu apsolutno prisiljeni prihvatiti. U tom smislu, kod teorije relativiteta osobito valja imati na umu [8] doprinose H. Poincaréa i H. A. Lorentza, još prije Einsteinove 1905. Osim toga, teorija je relativiteta, osim upornih protivnika, relativno brzo stekla i velik broj pristaša. Nasuprot tome, čak su i fizičari kao Max Planck i Niels Bohr, iako su i sami bili revolucionari kvantne teorije, uporno odbacivali Einsteinove kvante svjetlosti. To je bilo prvenstveno zbog njihove vjernosti konceptu klasičnih elektromagnetskih valova, premda je Einstein obrazložio da "se valna teorija svjetlosti sjajno pokazala pri opisima čisto optičkih fenomena" ali da "se optička opažanja odnose na vremenske prosjeke a ne na momentalne vrijednosti". [Ovog se moramo prisjetiti dolje, kod formula (3) i (4).] Zato je Einstein smatrao da može pretpostaviti da "kad se zraka svjetlosti širi iz neke točke, energija nije kontinuirano raspodijeljena po sve većem prostoru, nego se sastoji od konačnog broja kvanata energije koji su lokalizirani u točkama prostora, gibaju se bez dijeljenja, te mogu biti apsorbirani i generirani samo kao cjelina" [1]. On je tako u svom prvom radu iz 1905. godine [1] postavio hipotezu o kvantima elektromagnetskog polja – dakle, "česticama svjetlosti", koje je 1926. godine Gilbert Lewis nazvao fotonima.

[2] Autor je redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Područje znanstvenih istraživanja su elementarne čestice i kvantna teorija polja, klabucar@phy.hr

Zanimljivo je da je najrevolucionarniji Einsteinov rad [1] postao poznat kao "rad o fotoelektričnom efektu", iako je naravno mnogo općenitiji, a autorova motivacija za fotonsku hipotezu teorijska, a ne empirička. Fotoelektrični efekt mu je bio tek jedna od ilustracija za empirijsku uspješnost njegove hipoteze, a na koncu je svoju jedinu Nobelovu nagradu Einstein dobio (barem nominalno) za objašnjenje fotoelektričnog efekta.

To se dogodilo zato što je s akumuliranjem sve pouzdanijih eksperimentalnih rezultata postalo jasno da je upravo fotoelektrični efekt onaj empirijski fenomen koji je najuvjerljivije objašnjen fotonskom hipotezom i koji najbolje ilustrira njenu efikasnost. Zato ćemo se i mi ovdje vrlo detaljno pozabaviti tim efektom.

O povijesti i značenju fotoelektričnog efekta

Fotoelektričnim efektom, ili skraćeno fotoefektom, nazivamo izbijanje elektrona iz tijelâ (tipično, iz poliranih metalnih pločâ) na koja pada elektromagnetsko zračenje: vidljiva svjetlost, ultraljubičasto zračenje, itd. Taj efekt je nađen i proučavan prvenstveno u pokusima Heinricha R. Hertza (1887.), Wilhelma Hallwachsa (1888.), Josepha J. Thomsona (1899.), Philippa Lenarda (1899.), te Roberta A. Millikana (1916.). Osobita važnost fotoefekta je u tome što klasična fizika nije dovoljna da bi ga objasnila već se mora primijeniti Planckova hipoteza o kvantima energije. Štoviše, čak se i ona mora radikalizirati proširenjem na Einsteinovu hipotezu o kvantima elektromagnetskog polja – dakle, "česticama svjetlosti".

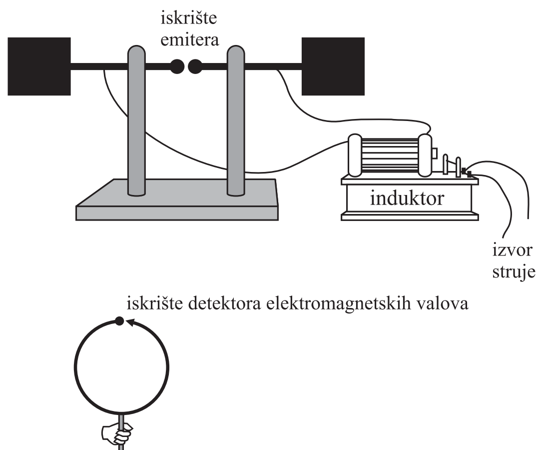
Albert Einstein je dakle (1905.) otkrio da je fotoefekt prvi i vrhunski dokaz da svjetlost – i elektromagnetsko zračenje općenito – ima i čestičnu, a ne samo valnu prirodu. Hertzovo prvotno otkriće zato predstavlja poseban kuriozitet u povijesti znanosti. Naime, on je slučajno opazio fotoefekt baš prilikom onih slavnih pokusa kojima je dokazao postojanje upravo elektromagnetskih valova.

Hertzovo otkriće fotoefekta

Prvi eksperimentalni odašiljač Hertz je sastavio od visokonaponskog induktora spojenog na dva mjedena cilindra (proširena velikim metalnim pločama da se poveća kapacitet prihvaćanja naboja) – vidi sliku 1. Na krajevima cilindarâ bile su kuglice razmaknute za petinu milimetra. Time je načinio iskrište jer bi iskre preskakale zbog visokog napona iz induktora. Hertz je naime zamislio da će, čim iskra stvori vodljivu stazu između dva mjedena vodiča, električni naboj hitro oscilirati prelazeći naizmjence s jednog vodiča na drugi, te u skladu s Maxwellovom teorijom, emitirati elektromagnetske valove valne duljine približne dimenzijama tih vodiča. No, da bi dokazao da su ti valovi zaista emitirani, morao ih je i detektirati. Hertzov detektor, dakle prvi prijemnik, bio je komad bakrene žice duljine približne (ukupnoj) duljini emiterskih vodiča, da bi prirodna (svojstvena) frekvencija oscilacije električne struje u toj žici bila bliska frekvenciji oscilacija u emiteru. Žicu s mjedenom kuglicom na jednom i šiljkom na drugom kraju, Hertz je savio u krug, da bi se inducirane oscilacije naboja u žici razotkrile iskrenjem preko malenog razmaka između kuglice i šiljka (vidi sliku 1). Zamisao je bila uspješna: čim bi se induktor stavio u pogon, u iskrištu "prijemnika" bi počele preskakati iskrice.

Razradom osnovne ideje u nizu briljantnih eksperimenata, Hertz je nepobitno dokazao postojanje Maxwellovih elektromagnetskih valova. Ono što je pak dovelo do otkrića

fotoefekta, bilo je Hertzovo nastojanje da poboljša detekciju time da bolje vidi iskrice. To je pokušavao postići zamračivanjem iskrišta detektora njegovim zatvaranjem u kutiju, ali je opazio da je time primjetno smanjena maksimalna duljina iskrica; odnosno, maksimalni razmak između kuglice i šiljka morao se znatno smanjiti da bi iskrice i sada preskakale. Dakle, zatvaranje u kutiju je otežalo iskrenje u odnosu na prethodnu situaciju. Uklanjanjem raznih dijelova kutije, vidjelo se da to olakšanje uzrokuje samo onaj dio koji zaklanja iskrište detektora od iskara na emiteru, i to nezavisno od položaja te prepreke.



Slika 1. Prvi radioodašiljač i prijemnik: Hertzov emiter i detektor elektromagnetskih valova. Pomoću njih je Hertz dokazao postojanje Maxwellovih valova, ali je istovremeno otkrio i fotoelektrični efekt. Naime, primijetio je da električna iskra lakše izbija na metalnom iskrištu ako ga obasjava ultraljubičasta svjetlost.

Važno je bilo samo da li iskre emitera nesmetano obasjavaju iskrište detektora ili ne, pa je Hertz konačno zaključio da to obasjavanje na neki način olakšava iskrenje detektora. Upornim izvođenjem raznovrsnih pokusa pokazao je i da taj efekt ne izaziva vidljiva nego ultraljubičasta svjetlost. Naime, zasjenjenje izvora izazivale su i sasvim prozirne ploče ako su bile od običnog, a one od kvarcnog stakla nisu. Znalo se da zračenje iskara uz vidljivu svjetlost ima i ultraljubičastu komponentu. Nju kvarcno staklo propušta, ali obično ne. Na koncu je Hertz kvarcnom prizmom rastavio svjetlost iskri odašiljača na komponentne valne duljine i dokazao da one ultraljubičaste, dakle kraće od vidljivih, na neki tajnoviti način olakšavaju i pojačavaju električne izboje, tj. iskrenje detektora.

Daljnji eksperimentalni razvoj

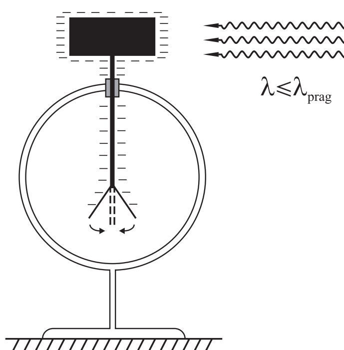
Hertzovo slučajno otkriće fotoefekta zbilo se u kontekstu pokusa namijenjenog drugoj svrsi (emisiji i detekciji elektromagnetskih valova), gdje su okolnosti bile prekomplicirane da bi se moglo doći do daljnjih spoznaja o čemu se tu radi. Zato je W. Hallwachs već sljedeće, 1888. godine načinio jednostavan pokus koji nam i danas služi kao školski primjer fotoefekta. Izoliranu pločicu cinka (kao u originalnom Hallwachsovom pokusu) ili nekog drugog metala spojimo na elektroskop koji može biti nabijen negativno ili pozitivno da bi mu listići bili razdvojeni. Ako pazimo da sve bude

dobro izolirano, naboj će se gubiti vrlo sporo, tj., dugo će vremena trebati da primijetimo i najmanje sklapanje listića elektroskopa. Zatim, metalnu pločicu obasjavamo svjetlom raznih intenziteta i valnih duljina. Bez obzira na povećanje intenziteta, tj. jakosti izvora svjetla, opažamo sljedeće:

a) Ako je instrument električno nabijen pozitivno, nikad ne opažamo nikakav učinak tog obasjavanja, kakvo god ono bilo.

b) Ako je pak instrument nabijen negativno, opažamo brz gubitak naboja *ako* pločicu obasjavamo svjetlom koje sadrži dovoljno kratke valne duljine λ, odnosno dovoljno visoke frekvencije $\nu = c/\lambda$. Kolika je maksimalna valna duljina λ_{prag} odnosno minimalna frekvencija ν_{prag} pri kojoj opažamo brz izboj, ovisi o kemijskom sastavu pločice. Ako je ona od cinka, kao u originalnom Hallwachsovom pokusu, potreban nam je svjetlosni izvor koji sadrži ultraljubičastu komponentu (npr. živina lampa ili plamen izgaranja magnezija). Obasjavanje cinčane pločice nema nikakvog učinka ako izvor zrači samo valne duljine veće od ultraljubičaste, tj. samo vidljivu i infracrvenu svjetlost (kao npr. obična žarulja).

c) Ako instrument u početku nije niti bio nabijen, obasjavanje metalne pločice valnim duljinama kraćim od λ_{prag}, uzrokovat će na instrumentu mali pozitivni naboj.

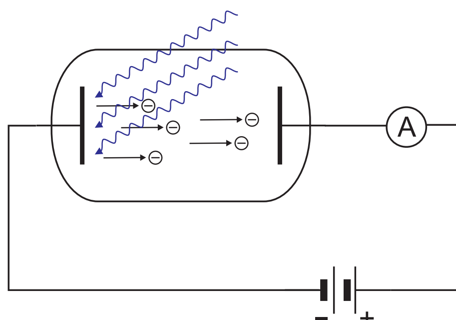


Slika 2. Demonstracija fotoefekta pomoću negativno nabijenog elektroskopa. Sklapanje listića elektroskopa pokazuje brz gubitak naboja uslijed fotoefekta. On se događa tek kad metalnu pločicu obasjava svjetlost valne duljine λ *manje od neke valne duljine praga* λ_{prag}, *koja ovisi o tome od kojeg metala je pločica. Npr., laki alkalni metali imaju* λ_{prag} *u vidljivom dijelu spektra: za kalij* $\lambda_{prag} = 5.50 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 0.550\,\mu m$, *za natrij* $0.540\,\mu m$, *te za litij* $0.500\,\mu m$. *U originalnom Hallwachsovom pokusu to je bio cink, pa je* $\lambda_{prag} = 0.287\,\mu m$, *što je u ultraljubičastom dijelu elektromagnetskog spektra. Za željezo i srebro na primjer, valne duljine* λ_{prag} *su još kraće,* $0.262\,\mu m$ *odnosno* $0.261\,\mu m$.

Nakon Hallwachsovog pokusa je postalo jasno da se kod fotoelektričnog efekta pod utjecajem svjetlosti događa izbacivanje negativnog naboja iz metala (pa se tako olakšava i iskrenje u Hertzovim pokusima). Ali nije postojala nikakva teorija, nikakvo adekvatno objašnjenje što se, kako i zašto sve to događa. Misterij se počeo razrješavati 1899. godine. Tada su J. J. Thomson i P. Lenard pokusima s vakuumskim cijevima pokazali da se pri fotoefektu izbacuju negativno nabijene čestice i da su to upravo elektroni. (Te elektrone, oslobođene pri fotoefektu, nazovimo *fotoelektronima*.)

Međutim Lenardovi pokusi su 1902. godine otkrili nove misteriozne činjenice. Proučavajući kako svojstva izbačenih elektrona ovise o intenzitetu i frekvenciji svjetlosti, ustanovio je da o intenzitetu (dakle energiji koju donosi svjetlost u jedinici vremena) ovisi samo *broj* izbačenih elektrona, ali njihova *energija* ovisi samo o frekvenciji. Lenard je u biti došao do empiričkih činjenica koje ćemo temeljito i pažljivo izreći u

sljedećoj sekciji, te označiti s **I**, **II** i **III**. Einstein je 1905. godine na temelju Lenardovih rezultata formulirao svoju hipotezu o kvantima elektromagnetskog polja, "česticama svjetla", fotonima.



Slika 3. Fotoefekt je pogodno proučavati u vakuumskim cijevima. Valovite linije označavaju elektromagnetsko zračenje koje upada na jednu od elektroda. U eksperimentalnoj fazi kad je u pitanju sama detekcija fotoefekta, zgodno je tu elektrodu priključiti na negativni, a suprotnu na pozitivni potencijal. To naime pogoduje skupljanju što većeg broja izbijenih elektrona na kolektorskoj elektrodi i tako omogućava ampermetru (A) detekciju struje i kod vrlo slabih intenziteta elektromagnetskog zračenja. (Naravno, valja primijeniti samo slabe potencijale, za koje nema nikakve sumnje da bi mogli nekako – npr. hladnom emisijom – utjecati na sâm proces nastanka fotoefekta i izazvati spuriozno pojačanje fotoelektrične struje.)

Lenardovi su rezultati bili dosta neprecizni jer su u ono vrijeme takvi eksperimenti bili teško provedivi. Einsteinovu znanstvenu intuiciju, smjelost i duboko razumijevanje fizike pokazuje i to što je bio u stanju uvesti ideju fotona na temelju takvih ograničenih, kvalitativnih eksperimentalnih podataka. S druge strane, to je značilo da Einsteinova teorija zapravo još *nije* bila eksperimentalno dokazana. Vodeći američki eksperimentalni fizičar R. Millikan, kao i mnogi drugi, nije prihvaćao fotonsku hipotezu jer ju je gledao kao napad na valnu teoriju svjetla i elektromagnetizma općenito. Zato se poduhvatio toga da sve što je u vezi fotoefekta radio Lenard, on napravi precizno, kvantitativno i potpuno, kako bi opovrgao Einsteina i potvrdio valnu, klasičnu elektrodinamiku. Radio je deset godina uporno i mukotrpno da nadiđe Lenardova ograničenja. Na primjer, razvio je tehniku struganja i poliranja metala unutar vakuumskih cijevi, jer je oksidacija metala (zbog nesavršenog vakuuma) bila jedan od problema koji su Lenardu ograničili preciznost.

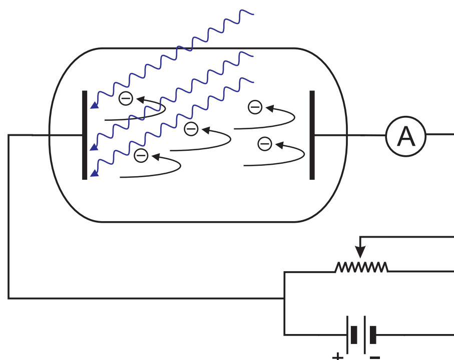
Kao što ćemo vidjeti u idućoj sekciji, Millikan je usput našao novu metodu mjerenja Planckove konstante do na 0.5% točnosti [9], te na koncu 1916. godine morao zaključiti da njegovi eksperimenti nipošto ne ruše, nego naprotiv, nepobitno dokazuju Einsteinovo objašnjenje fotoefekta. Za njega je Einstein dobio Nobelovu nagradu 1921. godine. Sâm Millikan se međutim sigurno utješio kad je i on (1923.) također dobio Nobelovu nagradu za svoje precizne eksperimente s fotoefektom.

Einsteinovo objašnjenje fotoefekta

Sâmo *postojanje* fotoefekta nije iznenađujuće sa stanovišta klasične elektromagnetske teorije, jer se znalo da materija sadrži elektrone i da se baš unutar metala relativno "slobodno" kreće puno elektrona jer to metalima i daje visoku električnu vodljivost.

Uostalom i proučavanje termoemisivnosti elektrona iz vrućih metala pokazuje da pojedini elektron može napustiti metal ako mu se zagrijavanjem dade neka minimalna energija, tzv. *izlazni rad*. Onda je jasno da se u principu i apsorpcijom elektromagnetskog zračenja elektroni mogu tako ubrzati da pobjegnu iz potencijala koji ih inače sprječava da napuste komade metala. Ipak, valna teorija svjetlosti, kao ni klasična fizika općenito, nikako ne može objasniti fotoefekt. Naime, ako razmotrimo četiri bitne *kvantitativne* empiričke činjenice u donjem tekstu, istaknute debelim tiskom kao **I – IV**, postaje jasno da druga i treća zahtijevaju Planckovu kvantnu hipotezu, te da se čak i ona mora proširiti i radikalizirati zbog četvrte točke.

I. Kad postoji fotoelektrični efekt, to jest kad se može opaziti struja izbijenih elektrona, ona je proporcionalna intenzitetu izvora svjetlosti, dakle kvadratu amplitude elektromagnetskog polja koje izbija elektrone iz tijela. — Ova činjenica je shvatljiva i očekivana i sa stanovišta klasične fizike, jer je energija koju nosi elektromagnetski val proporcionalna njegovom intenzitetu, tj. kvadratu njegove amplitude $\mathbf{E}$. Zbog sačuvanja energije tome mora biti proporcionalan i broj elektrona izbijenih u jedinici vremena.



Slika 4. Mjerenje frekventne ovisnosti maksimalne energije $\mathcal{E}_{max}$ koju postižu fotoelektroni lako se postiže malom modifikacijom eksperimentalnog postava s prethodne slike. Upotrijebimo svjetlo relativno velikog intenziteta koje izbija puno fotoelektrona. Tada ih dovoljno pristigne na kolektorsku elektrodu tako da ampermetar može registrirati fotoelektričnu struju čak i onda kad polaritet izvora napona obrnemo tako da kolektorska elektroda postane odbojna. Zatim potenciometrom postepeno povećavamo taj odbojni napon V_{stop} tako da je elektronima sve teže stići na kolektorsku elektrodu pa ampermetar registrira sve slabiju fotoelektričnu struju. Kad ona padne na nulu znači da je V_{stop} tako velik da je zaustavio i odbio čak i one elektrone koji su fotoefektom primili najveću moguću energiju $\mathcal{E}_{max}$, te da smo je izmjerili jer $\mathcal{E}_{max} = eV_{stop}$. Rezultati takvih mjerenja za razne frekvencije ν dani su na slici 5.

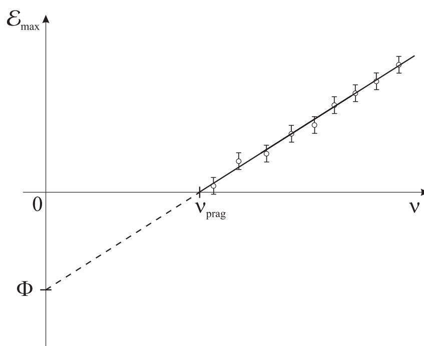
II. Da li fotoefekta uopće ima, tj. da li se iz pojedinog metala izbijaju elektroni ili ne, ovisi samo o frekvenciji svjetlosti koja ga obasjava. Za svaki metal postoji za njega karakteristična *frekvencija praga* ν_{prag} i **samo elektromagnetsko zračenje frekvencije ν veće od ν_{prag} može izbiti elektrone iz tog metala.** — Dakle, ako previše smanjimo frekvenciju, nestat će fotoefekta bez obzira koliko je velik intenzitet ($\propto \mathbf{E}^2$) zračenja. S druge strane, bez obzira koliko mi taj intenzitet smanjili, za $\nu > \nu_{prag}$ registrirat ćemo izbijene elektrone, jedino što njihov broj (tj. fotoelektrična struja) pada s intenzitetom u skladu s točkom **I**. Ovakva "sve ili ništa" zavisnost o frekvenciji praga je vrlo čudna sa stanovišta klasične elektromagnetske teorije, gdje energija elektromagnetskog vala ovisi jedino o njegovom intenzitetu, a nikako o njegovoj frekvenciji. Iz istog razloga, još je misteriozniji i treći skup činjenica.

III. Energija izbijenih elektrona je neovisna o intenzitetu svjetlosti koja izaziva fotoefekt, ali ovisi o frekvenciji. Eksperiment prikazan na slici 4 daje osobito jasnu frekventnu ovisnost *maksimalne* kinetičke energije ($\mathcal{E}_{max}$) izbijenih fotoelektrona – vidi sliku 5. S nje je očito da $\mathcal{E}_{max}$ **o frekvenciji ovisi linearno**

$$\mathcal{E}_{max} = h\nu - \Phi. \tag{1}$$

Precizna mjerenja $\mathcal{E}_{max}$ (npr. Millikan [9]) pokazuju da je koeficijent smjera dan Planckovom konstantom h. Simbol Φ označava izlazni rad. On je različit za svaki pojedini metal, a s frekvencijom praga povezan je Planckovom konstantom

$$\Phi = h\nu_{prag}. \tag{2}$$



Slika 5. Eksperimentalne točke pokazuju da je ovisnost maksimalne energije fotoelektrona o frekvenciji elektromagnetskog zračenja dana formulom (1).

Frekventne ovisnosti **II** i **III**, a osobito precizna frekventna ovisnost (1) nikako se ne mogu objasniti klasično, dakle bez Planckove hipoteza o apsorpciji energije u diskretnim porcijama – kvantima $h\nu$. Einstein je uočio da je s njom, naprotiv, objašnjenje vrlo lagano, elegantno i prirodno. Od elektromagnetskog zračenja frekvencije ν, elektron vezan u metalu prima kvant energije $h\nu$ – vidi sliku 6. Oni elektroni koji u tom metalu imaju najvišu energiju E_M, moraju od novodobivene energije $h\nu$ potrošiti samo energiju Φ da pobjegnu iz potencijala koji ih veže u metalu. To su upravo oni fotoelektroni koji pri danoj frekvenciji ν imaju maksimalnu[3] kinetičku energiju $\mathcal{E}_{max}$, i evo nam formule (1). S druge strane, ako je frekvencija elektromagnetskog zračenja $\nu < \nu_{prag}$, apsorbirani kvant energije $h\nu < \Phi$ i elektron nije dobio dovoljno energije[4] da se odvoji od metala, pa ne dolazi do fotoefekta.

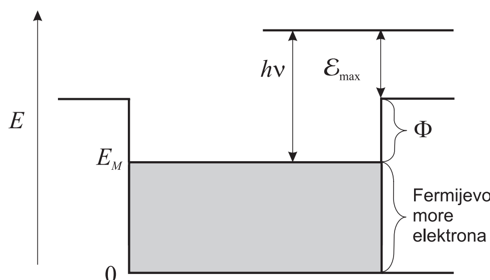
Dakle, kvantna hipoteza je uspješna i ovdje. Zamijetite da dosad nije bilo potrebno pretpostaviti ništa više nego kod Planckovog objašnjenja zračenja crnog tijela, tj. da se energija može emitirati i apsorbirati samo u diskretnim porcijama, kvantima $h\nu$. Primjerice, dovoljna je pretpostavka da elektron može iz elektromagnetskog polja apsorbirati energiju samo u porcijama $h\nu$. Dovoljna je i, također Planckova, pretpostavka o *kvantizaciji energija oscilacija.* Ako je kvantizirana energija harmonički oscilirajućih

---

[3] Naravno, iz razmatranja otpadaju oni elektroni koji su dio apsorbirane energije prije izlaska iz metala opet izgubili, npr. u nekom sudaru, jer takvi ne mogu postići maksimalnu energiju $\mathcal{E}_{max}$.

[4] Doduše, dovoljno energije da nadmaši Φ iako $\nu < \nu_{prag}$, elektron može dobiti tzv. multifotonskom apsorpcijom. To je slučaj kada elektron apsorbira dva ili više fotona simultano ili u tako brzom slijedu (unutar $\sim 10^{-15}$ s) da ne stigne pasti iz pobuđenog stanja prije nove apsorpcije. Međutim, zbog vrlo male vjerojatnosti takve višestruke apsorpcije, za nju je potrebna golema gustoća fotona. Zato se ona može realizirati tek uz upotrebu posebnih lasera veoma visokog intenziteta, a ne kod običnog fotoefekta, pa tu mogućnost ovdje ne razmatramo.

naboja u izvoru elektromagnetskog zračenja, onda i od njih stvoreno elektromagnetsko polje na frekvenciji ν ima energiju $Nh\nu$ gdje je N cijeli broj. Zato je, posljedično, i ta energija kvantizirana. Ali, nigdje se nije pretpostavilo da je i *sâmo elektromagnetsko polje kvantizirano*.



Slika 6. Tzv. Sommerfeldov model raspodjele elektronskih energija u metalu koji objašnjava ovisnost $\mathcal{E}_{max} = h\nu - \Phi$ (1) i $\Phi = h\nu_{prag}$ (2). Njegov shematski karakter ne utječe na općenitu valjanost rezultata (1) i (2), jer nisu važni nikakvi detalji nego samo činjenica da je najviša energija elektronâ u metalu, E_M, za izlazni rad Φ manja od potencijalne energije elektrona koji samo što se oslobodi iz potencijalne jame koja ga je vezala u metalu. (Vrijednost najviše elektronske energije E_M na apsolutnoj nuli temperature naziva se Fermijeva energija, E_F, tog metala.)

Međutim, u svom slavnom objašnjenju fotoefekta 1905. godine, Einstein je upravo tom pretpostavkom otišao i dalje od Planckove hipoteze o kvantima energije. Elektromagnetsko polje nije više zamišljao kao klasičan, kontinuiran val, već da je ono na neki način "zrnato" na mikroskopskom nivou. Naime, postulirao je da se elektromagnetsko zračenje frekvencije ν sastoji od diskretnih kvanata, fotona, od kojih svaki pojedini nosi energiju $h\nu$. Dakle, *kvantno* elektromagnetsko polje bi se sastojalo od tih elementarnih pobuđenja, "česticâ svjetla". Tek u fizikalnim procesima u kojima istovremeno sudjeluje ogroman broj fotona, elektromagnetsko polje možemo opisati kao klasično valno polje Maxwellove elektromagnetske teorije. Doduše, tu spadaju gotovo sve elektromagnetske pojave koje možemo zapaziti u našem makroskopskom svijetu, uz rijetke iznimke kao što je fotoefekt, pa je teorija zasnovana na klasičnim Maxwellovim jednadžbama ipak spektakularno uspješna. Tu valja istaći i brojne uspjehe tzv. *poluklasičnog* pristupa kvantnim pojavama, u kojem se za elektromagnetsko zračenje upotrebljavaju klasična polja, a kvantni aspekti su drugdje, kao npr. u tretmanu elektrona i druge "materije" i u njihovim diskretnim, kvantiziranim energijama. Na primjer, u kvantnomehaničkom opisu atoma i molekula dovoljno je već i klasično Coulombovo polje da se vrlo točno opiše interakciju između elektrona i jezgara. Obično se ne mora uzimati u obzir da ono zapravo potječe od emisije i apsorpcije fotona[5] na električnim nabojima.

Zapravo, gore smo vidjeli da se i činjenice **I**, **II**, **III** o fotoefektu također mogu shvatiti kroz Planckovu hipotezu o apsorpciji diskretnih energetskih kvanata ali uz klasično elektromagnetsko polje, dakle bez Einsteinovog fotonskog koncepta. Međutim, njega čini potpuno neizbježnim to što kod fotoefekta imamo i ovu empiričku činjenicu:

IV. Nikad nema vremenskog zaostatka od trenutka kad svjetlost padne na metal do trenutka emisije fotoelektrona (odnosno, to vrijeme je vrlo kratko, reda veličine $\sim 10^{-9}$ sekunde ili manje).

[5] Emisija i apsorpcija fotona, dakle efekti kvantne teorije elektromagnetskih polja, moraju se u atomskoj fizici uzeti u obzir tek kad se zahtijevaju tako velike točnosti teorijskog opisa da bi se mogli objasniti izvanredno fini efekti kao što je tzv. Lambov pomak.

Ono što je dostatno da objasni **I**, **II** i **III**, naime Planckova kvantna hipoteza da elektroni apsorbiraju diskretne porcije energije $h\nu$ iz elektromagnetskog polja, zbog **IV** više nije dovoljno ako je elektromagnetsko polje klasično. Naime, količina energije koju donese klasično elektromagnetsko zračenje snopom presjeka površine A u vremenu τ, iznosi

$$c\,\epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle A\tau, \tag{3}$$

gdje $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ znači srednju vrijednost kvadrata električnog polja $\mathbf{E}$. Zato bi za vrlo slab intenzitet svjetla, dakle vrlo maleni $\mathbf{E}^2$, bilo potrebno razmjerno dugo vrijeme

$$\tau > \frac{\Phi}{c\,\epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle A} \tag{4}$$

da se apsorbira energija $h\nu$ potrebna da nadmaši izlazni rad Φ i da započne emisija fotoelektrona. Ali to se nikad ne nalazi eksperimentalno, nego uvijek kao u **IV**, bez obzira koliko se oslabi polje $\mathbf{E}$. Dakle, ako u ovoj situaciji inzistiramo na klasičnom elektromagnetskom polju, fotoefekt bi značio nesačuvanje energije. S druge strane, fotonska teorija, tj. koncept kvantnog elektromagnetskog polja, nema tu nikakvih problema jer implicira da do fotoefekta dolazi tako da se apsorpcija energije na elektronu događa *odjednom*, u trenutku interakcije elektrona i "zrnca svjetlosti" – fotona. Kvadrat amplitude polja, koji je u klasičnoj teoriji polja proporcionalan gustoći energije zračenja, u kvantnoj je teoriji polja proporcionalan i prosječnom broju fotona po jedinici volumena, pa očito ni u njoj nema problema s objašnjenjem činjenice **I**.

Ekstreman slučaj upornog odbijanja fotonske hipoteze predstavlja Bohr, koji je bio skloniji prihvatiti čak i nesačuvanje energije, nego fotone. Ipak, ne čudi da je Plancku i mnogim drugima koji su prihvaćali kvante energije, bilo vrlo teško prihvatiti Einsteinove kvante elektromagnetskog polja, fotone. Mnogo je lakše bilo povjerovati da su kvantizirane oscilacije "materije" (npr. nabojâ u materijalu predmeta koji su emitirali elektromagnetsko zračenje) nego da je kvantizirano sâmo elektromagnetsko polje. Bilo je tako jer se o atomima znalo toliko malo da je bilo prostora da im se pripišu najneobičnija svojstva kako bi se objasnile fizikalne pojave. Nasuprot tome, elektromagnetsko zračenje se činilo savršeno opisano klasičnim Maxwellovim jednadžbama pa tu naizgled nije bilo prostora za ikakve promjene ili dopune. Fotonska teorija je zato postala općeprihvaćena tek nakon što je 1923. godine dobila odlučnu potvrdu kroz Comptonov efekt, ali je onda postala začetak daljeg razvoja kvantne teorije u smjeru *kvantne teorije polja*. Po njoj su sve elementarne kvantne čestice ("mikročestice") zapravo diskretna pobuđenja odgovarajućeg kvantiziranog polja, po analogiji s fotonima, "česticama svjetlosti" elektromagnetskog polja.

Zahvaljujem se dipl. ing. Davoru Horvatiću za pomoć kod crtanja slikâ.

Literatura

[1] A. Einstein, Ann. Phys., Lpz **17** (1905) 132–148.
[2] A. Einstein, doktorska teza, prihvaćena na Sveučilištu u Zürichu u srpnju 1905.
[3] A. Einstein, Ann. Phys., Lpz **17** (1905) 549–560.
[4] A. Einstein, Ann. Phys., Lpz **17** (1905) 891–921.
[5] A. Einstein, Ann. Phys., Lpz **18** (1905) 639–641.
[6] Vidi npr. M. Chalmers, Physics World, siječanj 2005, 16–17.
[7] J. S. Rigden, Physics World, travanj 2005, 18.
[8] Npr. vidi M. Born, *Physics in My Generation*, Pergamon Press, London 1956.
[9] R. A. Millikan, Phys. Rev. **7** (1916) 355.

Jedan način rješavanja jednadžbi četvrtog stupnja

Milorad Tomić[1], *Bjelovar*

Prikazat ćemo jedan način rješavanja algebarskih jednadžbi četvrtog stunja s realnim koeficijentima. Ideja za algoritam se temelji na (geometrijskim) jednakostima izračunavanja površine trokuta i njihovom poopćavanju u algebarskom smislu.

Dana je jednadžba četvrtog stupnja po t u obliku

$$t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0.$$

Zamijeni li se t sa $x - \frac{A}{4}$, dobiva se jednadžba oblika

$$x^4 + p_1x^2 + p_2x + q = 0. \tag{1}$$

Nađimo rješenja ove jednadžbe primjenom poznatog iskaza za površinu trokuta pomoću njegovih stranica. Neka su dani brojevi a, b, c i P tako da vrijedi

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = 16P^2. \tag{2}$$

Uvedemo li zamjene $S = \frac{a+b+c}{2}$, $D = a^2+b^2+c^2$, nakon sređivanja iz (2) dobivamo jednadžbu četvrtog stupnja

$$S^4 - \frac{D}{2}S^2 - abcS - P^2 = 0. \tag{3}$$

Uvedemo li ponovo zamjene:

$$x = S, \quad p_1 = -\frac{D}{2}, \quad p_2 = -abc, \quad q = -P^2,$$

jednadžbu (3) svodimo na oblik (1). Možemo li jednadžbu (1) četvrtog stupnja svesti na jednadžbu trećeg stupnja? Odgovor na ovo pitanje ćemo uskoro vidjeti.

Jednadžbu trećeg stupnja (čija će rješenja biti kvadrati brojeva a, b, c) možemo sastaviti iz brojeva drugog i četvrtog stupnja, te umnožaka tih brojeva. Sama rješenja jednadže (1) dobit ćemo pravilnim odabirom vrijednosti drugih korijena ovih rješenja.

Prema Viètovim formulama zbroj rješenja jednadžbe (1) je jednak 0. Uz supstituciju $x_1 = \frac{a+b+c}{2}$, je $x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a+b+c}{2}$.

[1] Dr. sc. Milorad Tomić je profesor matematike u Gimnaziji u Bjelovaru, e-mail: mm_tomic@yahoo.com

Pomoću Heronove formule $S(S-a)(S-b)(S-c)=P^2$ dobivamo jednakost

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=-q. \tag{4}$$

Neka su S_1, S_2, S_3, S_4 rješenja jednadžbe (3). Tada vrijedi $S_1S_2S_3S_4=q$, $S_2+S_3+S_4=-\dfrac{a+b+c}{2}$. Jednakost (4) pišemo u obliku

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-(b+c)}{2}\right)\left(\frac{b-(a+c)}{2}\right)\left(\frac{c-(a+b)}{2}\right)=q. \tag{5}$$

odnosno

$$x_1=\frac{a+b+c}{2},\quad x_2=\frac{a-(b+c)}{2},\quad x_3=\frac{b-(a+c)}{2},\quad x_4=\frac{c-(a+b)}{2}.$$

Napomenimo da je jednakost (2) za površinu trokuta *algebarska*, odnosno, istinita je i za kompleksme brojeve.

Iz (4) slijedi

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=-16q,$$

i nadalje redom:

$$\begin{aligned}\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)&=-16q,\\ 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)&=-16q,\\ \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^4+b^4+c^4\right)&=-16q.\end{aligned}$$

Iz ovih jednakosti dobiju se ove dvije:

$$\begin{aligned}a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2&=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}-8q,\\ \frac{a^4+b^4+c^4}{2}&=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2+4q,\end{aligned}$$

koje daju važan izraz za jedan od koeficijenata jednadžbe koju ćemo uskoro uvesti.

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2-4q=p_1^2-4q. \tag{6}$$

Ove jednakosti omogućuju nam postavljanje jednadžbe trećeg stupnja čija će rješenja biti kvadrati brojeva a, b, c. Označimo brojeve a, b, c u općem slučaju s u_i, $i=1,2,3$. Dakle, rješenja buduće jednadžbe bit će u_1^2, u_2^2, u_3^2.

Ukoliko je dana jednadžba trećeg stupnja oblika

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

a x_i, $i = 1, 2, 3$ su njezina rješenja, za koeficijente α, β, γ vrijedi:

$$\alpha = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad \beta = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad \gamma = -x_1x_2x_3.$$

Ako je, nadalje,

$$x^4 + p_1x^2 + p_2x + q = 0, \quad x = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{2},$$

vrijedi

$$-2p_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad -p_2 = u_1u_2u_3, \quad p_1^2 - 4q = u_1^2u_2^2 + u_1^2u_3^2 + u_2^2u_3^2.$$

Sljedbeno tome, pomoću koeficijenata jednadžbe (1) sastavljamo jednadžbu šestog stupnja po varijabli U:

$$U^6 + 2p_1U^4 + \left(p_1^2 - 4q\right) U^2 - p_2^2 = 0. \tag{7}$$

Uz zamjenu $U^2 = v$, dobivamo odgovarajuću jednadžbu trećeg stupnja i njezina rješenja v_1, v_2, v_3. Kako je $U_i = \pm\sqrt{v_i}$, $i = 1, 2, 3$, treba objasniti kako ćemo odabrati samo tri vrijednosti rješenja jednadžbe (7).

Neka su u_1, u_2, u_3 tri odabrana rješenja jednadžbe. Pošto je $-p_2 = u_1u_2u_3$, imamo ova dva slučaja:

(i) $\quad -p_2 > 0 \Rightarrow$ bar jedan od u_i, $i = 1, 2, 3$ (npr. u_1) mora biti > 0,
(ii) $\quad -p_2 < 0 \Rightarrow$ bar jedan od u_i, $i = 1, 2, 3$ (npr. u_1) mora biti < 0.

Napomenimo da druge dvije vrijednosti, npr. u_2 i u_3 mogu biti ili obje pozitivne ili obje negativne, a da se predznak od $-p_2$ neće promijeniti. Pošto je $-p_1 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)/2$, njegov predznak nije važan s obzirom na izbor predznaka od u_2 i u_3.

Odgovorimo sada na pitanje možemo li za umnožak rješenja jednadžbe uzeti bilo koje (međusobno jednake) predznake od u_2 i u_3? Kako je

$$x_1x_2 = \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{2}\right)\left(\frac{u_1 - (u_2 + u_3)}{2}\right),$$

odabir predznaka '$+$' za oba rješenja u_2 i u_3 ili '$-$' za ta rješenja daju isti umnožak, uz nebitu zamjenu redoslijeda faktora. Nadalje,

$$x_3x_4 = \left(\frac{u_2 - (u_1 + u_3)}{2}\right)\left(\frac{u_3 - (u_1 + u_2)}{2}\right),$$

pa i u ovom slučaju vrijedi isti zaključak.

Dakle, niti na umnožak rješenja ne utječe odabir (međusobno jednakih) predznaka od u_2 i u_3.

Uzmimo stoga, ne smanjujući općenitost, da su $-p_2$, u_1, u_2, u_3 ili svi pozitivni ili svi negativni. Dakle, $\operatorname{sign}(p_2) = -\operatorname{sign}(u_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Prema tome, ako jednadžbi (1) četvrtog stupnja pridružimo jednadžbu (7) šestog stupnja, iz svakog od tri para rješenja jednadžbe (7) oblika $(-r, r)$ odaberemo po jedno rješenje u_1, u_2, u_3 i to tako da mu predznak bude suprotan predznaku koeficijenta p_2. Ukoliko je $p_2 = 0$, imamo bikvadratnu jednadžbu pa u tom slučaju odaberemo potpuno ravnopravno ili U_1, U_3, U_5 ili U_2, U_4, U_6.

Rješenja jednadžbe(1) dobivamo u obliku:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1+u_2+u_3}{2}, \quad x_2 = \frac{u_1-(u_2+u_3)}{2}, \\ x_3 &= \frac{u_2-(u_1+u_3)}{2}, \quad x_4 = \frac{u_3-(u_1+u_2)}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Na kraju riješimo dva konkretna primjera.

Primjer 1. Nađimo sva rješenja jednadžbe

$$x^4+2x^2-3=0.$$

U ovom slučaju imamo bikvadratnu jednažbu koju možemo riješiti i na standardni (lakši) način. Ipak, provjerimo istinitost izrečenih postavki i za rješavanje ovih jednadžbi!

Pripadna jednadžba šestog stupnja je

$$U^6+4U^4+16U^2=0,$$

a njezina rješenja su: $U_{1,2}=0$, $U_{3,4}=\pm\left(1+\sqrt{3}\right)$, $U_{5,6}=\pm\left(1-\sqrt{3}\right)$. U ovom slučaju $(p_2=0)$ odabiremo bilo koju kombinaciju parova rješenja. Uzmemo li:

$$u_1=0, \quad u_2=-1-\sqrt{3}i, \quad u_3=-1+\sqrt{3}i,$$

iz relacija (8) dobivamo rješenja polazne jednadžbe:

$$x_1=-1, \quad x_2=1, \quad x_3=-\sqrt{3}i, \quad x_4=\sqrt{3}i.$$

Primjer 2. Odredimo sva rješenja jednažbe

$$x^4-2x^2+16x-15=0.$$

Pripadna jednažba šestog stupnja ima oblik

$$U^6-4U^4+64U^2-256=0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe (npr. faktorizacijom) dobivamo $U_{1,2}=\pm 2$, $U_{3,4}=\pm(2+2i)$, $U_{5,6}=\pm(2-2i)$. Kako je $\operatorname{sign}(p_2)=1$, vrijedi $\operatorname{sign}(u_k)=-1$, $k=1,2,3$, pa je

$$u_1=-2, \quad u_2=-2-2i, \quad u_3=-2+2i.$$

Rješenja dane jednadžbe četvrtog stupnja su:

$$x_1=-3, \quad x_1=1, \quad x_3=1-2i, \quad x_4=1+2i.$$

Literatura

[1] I. N. BRONŠTEJN, K. A. SEMENDJAJEV, *Matematički priručnik,* Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[2] M. NIKOLIĆ, *Jednačine četvrtog stepena,* Matematika, Zagreb – Beograd – Sarajevo, 1978.

[3] ***, Čisla i figuri, Moskva 1964.

Male tajne Fibonaccijevih brojeva

Dušan Murovec, Križevci pri Ljutomeru, Slovenija

Jedan od najpoznatijih nizova prirodnih brojeva je sigurno Fibonaccijev niz koji se definira na sljedeći način:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2.$$

Pozabavimo se najprije izračunavanjem Fibonaccijevih brojeva. U tu svrhu riješimo diferencijsku jednadžbu

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

uz početne uvjete $f(0) = f(1) = 1$.

Iz kombinatorike znamo da funkcija f mora zadovoljavati karakterističnu jednadžbu

$$s^2 = s + 1 \quad \text{tj.} \quad s^2 - s - 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $s_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dana diferencijska jednadžba je riješena s točnošću do na konstante C_1 i C_2:

$$f(n) = C_1 s_1^n + C_2 s_2^n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Iz početnih uvjeta odredimo konstante C_1 i C_2:

$$1 = C_1 + C_2,$$
$$1 = C_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Rješavanjem ovog sistema linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice dobivamo:

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad C_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

pa je

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right). \tag{1}$$

Ovo je poznata Binetova formula.

Po definiciji lako izračunamo prvih 15 Fibonaccijevih brojeva: $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 3$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$.

Vjerojatno imate kalkulator pa se malo pozabavite računanjem Fibonaccijevih brojeva po Binetovoj formuli (1) $\left(\text{ili } F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Budući da moje računalo nije bilo od dovoljno velike točnosti dobio sam: $F_4 = 2.999999$, $F_5 = 4.919349$, $F_{10} = 55.000014$, $F_{15} = 609.999934$, $F_{20} = 6\,765$, $F_{25} = 75\,025$, $F_{30} = 832\,040$, $F_{35} = 9\,227\,465$, $F_{40} = 102\,334\,155$, a već kod F_{44} osjeća se greška računala zbog zaokruživanja $\sqrt{5}$. Kod $F_{50} = 12\,586\,269\,025$ greška računala je 25 jedinica. Najveći Fibonaccijev broj kojeg sam mogao direktno dobiti kalkulatorom bio

je $F_{478} = 3.5205 \cdot 10^{99}$. Pomoću logaritama i kalkulatora moguća je procjena i većih Fibonaccijevih brojeva.

Uzmimo sada nekoliko prvih prirodnih brojeva i pokušajmo ih prikazati kao sumu Fibonaccijevih brojeva, ali tako da ne upotrijebimo dva uzastopna Fibonaccijeva broja (i još isključimo F_1). Evo nekoliko primjera:

5	=	5
6	=	5+1
7	=	5+2
8	=	8
9	=	8+1
10	=	8+2
11	=	8+3
12	=	8+3+1
13	=	13
14	=	13+1
15	=	13+2
100	=	89+8+3
801	=	610+144+34+13

Ovime naslućujemo da vrijedi posebno značajan tzv. Zeckendorfov teorem.

Teorem. *Svaki prirodni broj n može se na jednoznačan način prikazati kao*

$$n = \sum_{i \geq 2} c_i F_i, \quad c_i \in \{0, 1\}, \quad c_i c_{i+1} = 0.$$

To znači da se u sumi nikad ne pojavljuju dva uzastopna Fibonaccijeva broja.

Dokaz. Za svaki $m \in \mathbf{N}$ vrijedi ovaj identitet

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2m-1} = F_{2m}. \tag{2}$$

Da to dokažemo, primijetimo da vrijede jednakosti

$$F_1 = F_2, \quad F_3 = F_4 - F_2, \quad \ldots, \quad F_{2m-1} = F_{2m} - F_{2m-2},$$

a njihovim zbrajanjem dobivamo traženi identitet. Analogno je

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2m} = F_{2m+1} - 1.$$

Pokažimo sada da za svaki prirodni broj n postoji traženi prikaz, tj.

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + \ldots + F_{n_k}. \tag{3}$$

Ovdje je $n_1 > n_2 > \ldots > n_k \geq 2$ i $n_i \geq n_{i+1} + 2$, za $1 \leq i \leq k-1$. Pošto je niz F_2, F_3, $\ldots$ monotono rastući, postoji indeks $n_2 \geq 2$ tako da vrijedi

$$F_{n_1} \leq n < F_{n_1+1}.$$

Ako je $F_{n_1} = n$, onda je dokaz gotov. U protivnom je

$$F_{n_1} < n < F_{n_1+1}.$$

Oduzimamo F_{n_1} i još uzimamo u obzir $F_{n_1+1} = F_{n_1} + F_{n_1-1}$, pa dobivamo

$$0 < n - F_{n_1} < F_{n_1-1}.$$

Sada je

$$F_{n_2} \leq n - F_{n_1} < F_{n_1-1}.$$

Zbog $F_{n_2} \leq n - F_{n_1} < F_{n_1-1}$ i još $F_{n_2} < F_{n_1-1}$, dobijemo $n_2 < n_1 - 1$ ili $n_1 \geq n_2 + 2$. Ako je $n - F_{n_1} = F_{n_2}$ postoji traženi prikaz $n = F_{n_1} + F_{n_2}$. U protivnom nastavljamo opisani postupak. Nakon konačno mnogo koraka dobivamo rješenje u obliku (3). Zbog jednolikosti isključimo prvi Fibonaccijev broj $F_1 = 1$.

Jednoznačnost Zeckendorfovog prikaza lako se dokazuje matematičkom indukcijom.

Time smo dobili jednostavan algoritam kako zapisati Zeckendorfov prikaz bilo kojeg prirodnog broja. Izaberemo najveći Fibonaccijev broj koji nije veći od n, recimo F_k, te na ostatku $n - F_k$ taj korak nastavljamo dok ne dođemo do kraja.

Pokažimo još dva svojstva Fibonaccijevih brojeva.

1° Fibonaccijev broj $f(k)$ je paran ako i samo ako je k oblika $3n+2$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Nenegativne cijele brojeve podijelimo u ova tri podskupa:

$$S = \{3n+1, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : 1, 4, 7, 10, \ldots\},$$
$$R = \{3n+2, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : 2, 5, 8, 11, \ldots\},$$
$$T = \{3n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : 0, 3, 6, 9, \ldots\}.$$

Sada indukcijom dokazujemo da je $f(k)$ paran ako je $k \in R$, a neparan ako je $k \in S \cup T$.

Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je ona istinita za neki n, tj. $f(3n+1)$ i $f(3n)$ su neparni, a $f(3n+2)$ je paran broj. Sada računom pokazujemo:

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad f(3(n+1)+1) &= f(3n+4) = f(3n+3) + f(3n+2) \\
&= f(3n+1) + 2f(3n+2) = \text{neparan broj;} \\
\text{b)}\quad f(3(n+1)) &= f(3n+2) + f(3n+1) = \text{neparan broj;} \\
\text{c)}\quad f(3(n+1)+2) &= f(3n+5) = f(3n+4) + f(3n+3) \\
&= f(3n+2) + 2f(3n+3) = \text{paran broj.}
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana.

2° Pokažimo i ovo svojstvo Fibonaccijevih brojeva: Svaki peti Fibonaccijev broj je višekratnik od 5.

Ovo također dokazujemo matematičkom indukcijom. S $f(k-1)$ je označen k-ti Fibonaccijev broj. Treba dokazati da je $f(5n+4)$ djeljivo s 5 za svaki $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Za $n = 0$ je $f(4) = 5$ i prema diferencijskoj jednadžbi je

$$\begin{aligned}
f(5(n+1)-1) = f(5n+4) &= f(5n+3) + f(5n+2) = 3f(5n+1) + 2f(5n) \\
&= 5f(5n) + 3f(5n-1).
\end{aligned}$$

Time je dokaz završen.

Zadaci

1. Riješite diferencijsku jednadžbu

$$y(n+2) = y(n+1) + 2y(n), \quad y(0) = y(1) = 1.$$

2. Izračunajte ove Fibnaccijeve brojeve: F_{26}, F_{31}, F_{43}.

3. Nađite Zeckendorfov prikaz ovih brojeva: 20, 33, 110, 517.

4. Pomoću računala dajte procjenu za F_{100} i F_{1000}.

5. Procijenite približno Fibonaccijeve brojeve F_{10^6}, F_{10^9}, $F_{10^{10}}$.

Literatura

[1] S. Klavžar, *Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke*, Obzornik za matematiko in fiziko, **50**(6), godište 2003.

[2] Balakrishman, *Combinatorics*, Schaum's Outlines McGraw-Hill, 1995.

Primjena Jensenove nejednakosti u trigonometriji

Marko Valčić, Zadar

Ovaj se članak sadržajno oslanja na članak [1] u kojem je J. Pečarić iznio značenje i primjenu konveksnosti funkcija pri dokazivanju raznih nejednakosti. Mi ćemo se ovdje zadržati samo na jednoj takvoj nejednakosti i upoznati njenu vrlo veliku i efikasnu primjenu u trigonometriji. Budući je njena formulacija usko povezana s konveksnim funkcijama, prethodno ćemo precizirati pojam konveksnosti neke funkcije na zadanom intervalu.

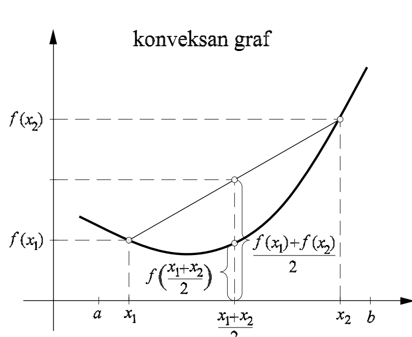
Definicija 1. Funkcija f je konveksna na intervalu $[a, b]$ ako za svaki x_1, $x_2 \in [a, b]$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (1)$$

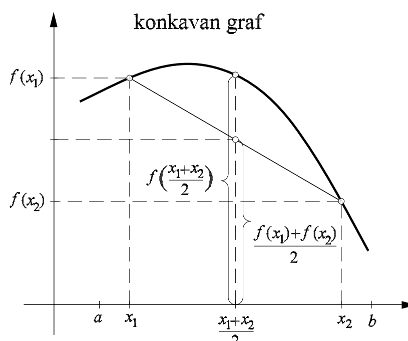
Definicija 2. Funkcija f je konkavna na intervalu $[a, b]$ ako za svaki x_1, $x_2 \in [a, b]$ vrijedi

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (2)$$

Definicije 1. i 2. možemo zgodno interpretirati geometrijski na sljedeći način.



Sl. 1.



Sl. 2.

Funkcija f je konkavna na intervalu $[a, b]$ ako je $-f$ konveksna na intervalu $[a, b]$. Vrijedi i obrat tvrdnje.

Jensenova nejednakost

Iz navedenih definicija možemo naslutiti da vrijedi i sljedeći

Teorem 1. Ako je f konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$, te $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ onda vrijedi nejednakost

$$f\Big(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \qquad (3)$$

Ukoliko u (1) vrijedi $x_1 = x_2$, tada u (3) vrijedi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Donosimo samo skicu dokaza kojeg provodimo indukcijom. Iz pretpostavke da (3) vrijedi za $n > 2$ dokažimo da vrijedi i za $n-1$. Neka je

$$x_n = \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

Po pretpostavci je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$
$$\leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}.$$

Sredimo li lijevu stranu, dobivamo

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})]+\frac{1}{n}f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right),$$

odakle slijedi tražena relacija.

Originalni dokaz u cjelosti sadržava i induktivni dokaz za $n = 2^k$ kojeg ovdje ispuštam i prepuštam vama da ga dokažete.

Teorem 2. Ako je f konkavna funkcija na intervalu $[a, b]$, te $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ onda vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \qquad (4)$$

Konveksne i konkavne funkcije

Prvi radovi s područja konveksnih funkcija potječu od nekoliko značajnijih matematičara prošlog i pretprošlog stoljeća. Tako se smatra da je austrijski matematičar O. Stolz (1842. – 1905.) u svom članku iz 1893. godine prvi uveo pojam konveksne funkcije. Čak je četiri godine ranije, 1889. godine, njemački matematičar O. Hölder (1859. – 1937.) dokazao nejednakost (3) uz uvjete da za funkciju f postoji f'' i $f''(x) \geqslant 0$. Kasnije ćemo vidjeti da je upravo to kriterij konveksnosti neke funkcije. Međutim, pravo značenje konveksnih funkcija iznio je tek danski matematičar J. L. W. V. Jensen (1859. – 1925.) u svojim člancima iz 1905. i 1906. godine, u kojima je definirao konveksne funkcije pomoću nejednakosti (1), te dokazavši teorem 1 ponio počast po kojoj i danas nejednakost (3) nazivamo *Jensenova nejednakost*.

Iz svega što smo dosad naveli lako zaključujemo da Jensenovu nejednakost možemo primijeniti kako na konveksne tako i na konkavne funkcije. No, postavlja se pitanje kako odrediti kad je funkcija konveksna, a kad konkavna. Najlakše poimanje i shvaćanje konveksnosti dano je upravo kroz nejednakost (1) i sl. 1, no učenicima koji su upoznati s nekim osnovnim elementima matematičke analize (neprekidnost, limes, derivacija) dan je jednostavniji način kroz svojevrsni kriterij konveksnosti, tj. konkavnosti u sljedećem teoremu.

Teorem 3. Ako postoji neprekidna druga derivacija funkcije f na intervalu $[a,b]$ onda vrijedi:

$$\begin{aligned} f'' > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{funkcija je konveksna na } [a,b], \\ f'' < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{funkcija je konkavna na } [a,b]. \end{aligned}$$

Budući da dokaz uključuje neke temeljne teoreme s područja matematičke analize, to ga ovdje ne navodimo, ali zainteresiraniji učenik može više o tome naći u [3].

Na kraju ovog teoretskog dijela ipak je važno naglasiti da konveksna funkcija na nekom intervalu nije nužno i derivabilna. Drugim riječima to znači da na graf konveksne funkcije u nekoj točki možda nećemo moći povući tangentu što za posljedicu povlači da u toj točki ne možemo definirati konveksnost. Slično vrijedi i za konkavnost.

Konveksnost i konkavnost trigonometrijskih funkcija

Kad je riječ o trigonometrijskim funkcijama onda zbog njihove periodičnosti ne možemo govoriti općenito o konveksnosti ili konkavnosti. Međutim, na pojedinim intervalima možemo promatrati konveksnost ili konkavnost trigonometrijskih funkcija. Tako imamo

Posljedica 1. Funkcija $f(x) = \sin x$ je konkavna na intervalu $[0,\pi]$.

Tvrdnja posljedice nam je lako razumljiva sjetimo li se sl. 2 i grafa sinusoide. Strogi dokaz nam daje teorem 3 prema kojem za $f(x) = \sin x$ dobivamo $f''(x) = -\sin x < 0$, $x \in [0,\pi]$. Konkavnost smo elementarno mogli dokazati, ukoliko dokažemo nejednakost

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}, \qquad x_1,\ x_2 \in [0,\pi]. \tag{5}$$

Posljedica 2. Funkcija $f(x) = \cos x$ je konkavna na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Slično kao kod posljedice 1.

Posljedica 3. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ je konveksna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Prema teoremu 3 dobivamo $f''(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x} > 0$, za $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Kod većine težih i složenijih nejednakosti navedene posljedice nam ne mogu osigurati konveksnost ili konkavnost određene funkcije, jer se najčešće radi o kompoziciji funkcija ili kombinaciji različitih trigonometrijskih funkcija. Međutim, uvijek vrijede teoremi 1, 2 i 3 pa njihovom upotrebom bez većih teškoća možemo riješiti širok spektar zadataka.

Rješavanje trigonometrijskih pomoću Jensenove nejednakosti

Kao direktna posljedica Jensenove nejednakosti proizlaze mnoge danas poznate nejednakosti kao npr. Cauchyeva, Čebiševljeva, Hölderova, Minkowskijeva, Bunjakovski-Cauchyeva, Aczelova, itd. no mi ćemo se ovdje ograditi samo na tehnike dokazivanja trigonometrijskih nejednakosti koje proizlaze iz teorema 1 i 2.

Zadatak 1. Neka su $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \frac{\pi}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dokaži nejednakosti

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \leqslant n \cdot \sin\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big),$$
$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \leqslant \sin^n\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big).$$

Rješenje. Za funkciju $f(\alpha_i) = \sin\alpha_i$, $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi $f''(\alpha_i) = -\sin\alpha_i < 0$ (posljedica 1) pa prva nejednakost proizlazi ako na funkciju $f(x) = \sin x$ primijenimo teorem 2. Za drugu nejednakost, također prema teoremu 2 imamo

$$\ln(\sin\alpha_1) + \ln(\sin\alpha_2) + \ldots + \ln(\sin\alpha_n) \leqslant n \cdot \ln\Big(\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big),$$

tj.

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \leqslant \sin^n\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\Big),$$

jer je za $f(x) = \ln\sin x$ na intervalu $\Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]$

$$f''(x) = \Big(\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\Big)' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

Uočimo da za $n = 3$, tj. kad je riječ o trokutu dobivamo sljedeće nejednakosti

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

Zadatak 2. Dokaži da u šiljastokutnom trokutu vrijedi

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\Big).$$

Rješenje. Kutovi α, β, γ su iz intervala $\Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle$. Promotrimo funkciju

$$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x, \qquad x \in \Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle. \tag{6}$$

Budući da je $f''(x) = \frac{2 - \cos^3 x}{\cos^3 x}\sin x > 0$, $\forall x \in \Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle$, to je funkcija (6) strogo konveksna na intervalu $\Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle$. Prema teoremu 1 imamo

$$\frac{(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha) + (\sin\beta + \operatorname{tg}\beta) + (\sin\gamma + \operatorname{tg}\gamma)}{3} \geqslant \sin\Big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Big) + \operatorname{tg}\Big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Big),$$

tj.

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\Big(\sin\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\Big) = 3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\Big).$$

Znak jednakosti u posljednjoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. kad je zadani trokut jednakostraničan.

Zadatak 3. Dokaži nejednakost

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30' < \frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ}{44}.$$

Rješenje. Budući da je funkcija $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$ konkavna na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ jer je

$$f''(x) = (\ln \operatorname{tg} x)'' = -4 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} < 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle,$$

to prema teoremu 2 možemo pisati

$$\ln \operatorname{tg} 1^\circ + \ln \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \ln \operatorname{tg} 44^\circ \leqslant 44 \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1^\circ + 2^\circ + \ldots + 44^\circ}{44} \right),$$

$$\frac{1}{44} \ln(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ) \leqslant \ln \operatorname{tg}(22^\circ 30')$$

te konačno dobivamo

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ} < \operatorname{tg} 22^\circ 30'. \tag{7}$$

Zbog konveksnosti funkcije $g(x) = \operatorname{tg} x$ (posljedica 3) na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$, prema teoremu 1 dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 44^\circ}{44} > \operatorname{tg}\left(\frac{1^\circ + 2^\circ + \ldots + 44^\circ}{44} \right) = \operatorname{tg} 22^\circ 30'. \tag{8}$$

Iz nejednakosti (7) i (8) direktno proizlazi tražena dvostruka nejednakost.

Zadatak 4. Ako su $x, y, z \in \mathbf{R}$ $(0 \leqslant x, y, z < \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbf{N}$ dokaži nejednakost

$$\operatorname{tg}^n x \cdot \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n y \cdot \operatorname{tg}^n z + \operatorname{tg}^n z \cdot \operatorname{tg}^n x \geqslant \frac{1}{3^{n-1}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x)^n.$$

Rješenje. Za $n = 1$ vrijedi jednakost. Neka je $n \geqslant 2$ i $f(x) = x^n$, $x > 0$. Budući je $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $x > 0$, to možemo primijeniti teorem 1, te slijedi

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right),$$

a samim time i

$$\frac{x_1^n + x_2^n + x_3^n}{3} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^n. \tag{9}$$

Kako za brojeve $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $0 \leqslant x, y, z < \frac{\pi}{2}$, to je $\operatorname{tg} x \geqslant 0$, $\operatorname{tg} y \geqslant 0$, $\operatorname{tg} z \geqslant 0$. Supstitucijom $x_1 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$, $x_2 = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$, $x_3 = \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x$ u nejednakost (9) dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg}^n x \cdot \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n y \cdot \operatorname{tg}^n z + \operatorname{tg}^n z \cdot \operatorname{tg}^n x}{3} \geqslant \left(\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x}{3} \right)^n$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

Zadatak 5. Neka su α, β, γ kutovi trokuta i $n \in \mathbf{N}$. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\gamma}{2} \geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Rješenje. Za funkciju $f(x) = \operatorname{ctg}^n x$ dobivamo $f''(x) = n(n-1) \operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot \dfrac{1}{\sin^4 x} + 2n \operatorname{ctg}^{n-1} x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} > 0$, $\forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $n \in \mathbf{N}$. Budući je funkcija $f(x)$ prema teoremu

3 konveksna, iz teorema 1 slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} &= 3\Big(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2}\Big)\\ &\geqslant 3\operatorname{ctg}^n\frac{1}{3}\Big(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\Big)\\ &= 3\operatorname{ctg}^n\Big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\Big)=3\operatorname{ctg}^n\frac{\pi}{6}=3^{\frac{n+2}{2}}.\end{aligned}$$

Zaključak

Nadam se da ste kroz ovih nekoliko primjera uočili efikasnost Jensenove nejednakosti. Kao što ste mogli i primijetiti, sama metodika rješavanja relativno je standardna i svodi se na određivanje odgovarajuće funkcije definirane na nekom zadanom intervalu kojoj određujemo konveksnost ili konkavnost, te konačno realiziramo dokaz kroz teorem 1 ili 2.

Za one koji nisu uočili prednost teorema 1 i 2 nad klasičnim rješavanjem, predlažem da riješe sve nejednakosti, koje su ovdje navedene, nekom drugom metodom (indukcijom, trigonometrijski,. . .), dok za one druge ostavljam još nekoliko zadataka za uvježbavanje.

Korisno bi bilo upamtiti teoreme opisane u ovom članku i razmisliti o upotrebi Jensenove nejednakosti na ostale funkcije (nejednakosti algebarskog karaktera).

Zadaci za vježbu

1. Ako su α_1, α_2, ..., α_n kutovi konveksnog mnogokuta, dokaži da vrijede nejednakosti

$$\sin\frac{\alpha_1}{m}+\sin\frac{\alpha_2}{m}+\ldots+\sin\frac{\alpha_n}{m}\leqslant n\sin\Big(\frac{n-2}{mn}\pi\Big),$$

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n<\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)^n.$$

2. Dokaži da u šiljastokutnom trokutu vrijedi

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqslant 3\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\Big).$$

3. Neka su α, β, γ kutovi trokuta i $n\in\mathbf{N}$. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}^n\alpha+\operatorname{tg}^n\beta+\operatorname{tg}^n\gamma\geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Literatura

[1] J. Pečarić, *Konveksne funkcije i nejednakosti*, MFL, god. XXXIX, 4/159, 1988.–89.

[2] D. S. Mitrinović i P. M. Vasić, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza I. i II. dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1997.

[4] M. Valčić, *Trigonometrija – odabrani zadaci*, Element, Zagreb, 1996.

Površina tangencijalno-tetivnog četverokuta

Mladen Halapa, Bjelovar

U mnoštvu mnogokuta zanimljiva je formula za površinu četverokuta kojemu se istodobno može upisati i opisati kružnica:

$$P = \sqrt{abcd}, \tag{1}$$

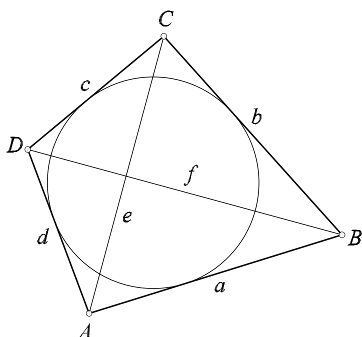
gdje su a, b, c, d duljine stranica.

Dokažimo formulu!

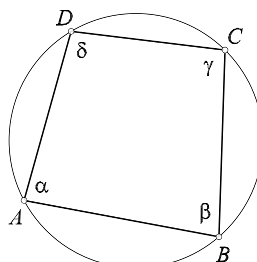
Podsjetimo se definicija tangencijalnog i tetivnog četverokuta.

• Četverokut u koji se može upisati kružnica (*kojemu su stranice tangente kružnice*), zove se tangencijalni četverokut (slika 1) i vrijedi:

$$a + c = b + d. \tag{2}$$



Slika 1.



Slika 2.

• Četverokut oko kojeg se može opisati kružnica (*kojemu su stranice tetive kružnice*), zove se tetivni četverokut (slika 2) i vrijedi:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \tag{3}$$

Da bismo izveli formulu (1), dokazat ćemo prije toga tri stavka.

Stavak 1. (Ptolemejev[1] poučak) Za svaki tetivni četverokut $ABCD$ je:

$$ef = ac + bd, \tag{4}$$

gdje je:

$$|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CD| = c,\ |DA| = d,\ |AC| = e,\ |BD| = f. \tag{5}$$

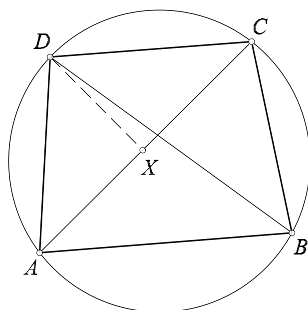
Dokaz. Na dijagonali AC konstruiramo točku X tako da je:

$$\sphericalangle ADX = \sphericalangle BDC.$$

Budući da su kutovi $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle DBC$ obodni kutovi nad lukom $\overset{\frown}{CD}$, slijedi:

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC.$$

[1] Ptolemej, Klaudije (oko 100. – oko 178.), starogrčki matematičar.



Slika 3

Trokuti AXD i BCD slični su jer imaju jednake kutove. Valjan je omjer:

$$|AD| : |AX| = |BD| : |BC|,$$

odnosno:

$$|AD| \cdot |BC| = |AX| \cdot |BD|. \tag{6}$$

Istu argumentaciju ponovimo za trokute ABD i CDX. Obodni kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ABD$ jednaki su jer su nad istim lukom $\overset{\frown}{DA}$. Budući je

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle XDC,$$

trokuti ABD i XCD su slični. Zato je:

$$|AB| : |BD| = |CX| : |CD|,$$

tj.

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CX|. \tag{7}$$

Zbrojimo (6) i (7), a nakon sređivanja dobijemo traženu jednakost:

$$|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AX| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CX| = |BD| \cdot |AC|$$

ili zbog (5):

$$ef = ac + bd.$$

□

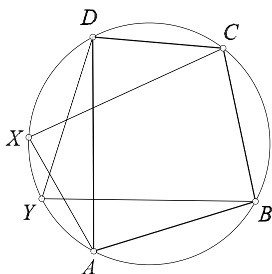
Stavak 2. Za svaki tetivni četverokut $ABCD$ vrijedi jednakost:

$$|AC| : |BD| = (|AB| \cdot |AD| + |CB| \cdot |CD|) : (|BA| \cdot |BC| + |DA| \cdot |DC|).$$

Koristeći oznake (5), možemo pisati:

$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd). \tag{8}$$

Dokaz.



Slika 4

Konstruirajmo tetivni četverokut $ABCD$ i na kružnici odredimo točke X i Y tako da vrijedi:

$$\overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{CD}, \quad \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{AB}.$$

Uočimo dva nova tetivna četverokuta $AXCB$ i $BYDC$. Na svaki od njih primijenimo Ptolemejev poučak:

$$|AC| \cdot |BX| = |AB| \cdot |CX| + |AX| \cdot |BC|, \tag{9}$$

$$|BD| \cdot |CY| = |CD| \cdot |BY| + |BC| \cdot |DY|. \tag{10}$$

Zaključujemo da zbog jednakosti duljine lukova (slika 4) slijede jednakosti među duljinama tetiva:

$$\begin{aligned}
&\overset{\frown}{AX} = \overset{\frown}{DC} \implies |AX| = |DC|, \quad \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{AB} \implies |DY| = |AB|,\\
&\overset{\frown}{CY} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{XA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{XB} \implies |BX| = |CY|,\\
&\overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DX} = \overset{\frown}{DX} + \overset{\frown}{XA} = \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DY} + \overset{\frown}{YA} = \overset{\frown}{YA} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{YB}\\
&\qquad \implies |CX| = |BY| = |AD|.
\end{aligned}$$

Relaciju (9) podijelimo s (10) i, koristeći gornje jednakosti, dobijemo tvrdnju (8).

Sada se duljina svake dijagonale tetivnog četverokuta lako može izračunati pomoću duljina stranica. Iz (8) se, na primjer, dobiva duljina dijagonale e:

$$e = f\frac{ad + bc}{ab + cd},$$

a s pomoću Ptolemejeva poučka (4) konačno:

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}. \tag{11}$$

□

Stavak 3. (Heronova[2] formula za površinu tetivnog četverokuta)

Površina tetivnog četverokuta je:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \tag{12}$$

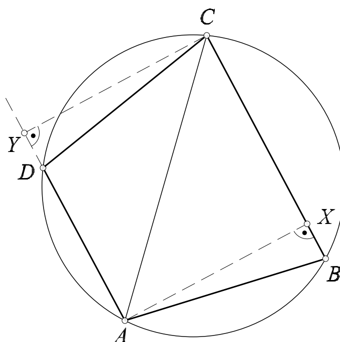
gdje su a, b, c, d duljine stranica, a s poluopseg

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}. \tag{13}$$

Zanimljivo je da je ta formula slična formuli za površinu trokuta. U literaturi ćemo naći podatak kako je bila poznata već staroindijskim matematičarima.

Dokaz. Tetivni četverokut $ABCD$ rastavimo dijagonalom AC na dva trokuta ABC i ACD. Konstruirajmo njihove visine AX i CY. Površina četverokuta $ABCD$ može se izraziti kao zbroj površina trokuta ABC i ACD:

$$P = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD}.$$



Slika 5

[2] Heron, starogrčki matematičar, živio u Aleksandriji vjerojatno u 1. stoljeću poslije Krista.

Trokuti ABX i CDY slični su jer imaju jednake kutove. Uvjerimo se:

$$\sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY = \sphericalangle XBA + \sphericalangle BAX,$$
$$\sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY = 180^\circ - \sphericalangle ADC + \sphericalangle BAX,$$
$$\sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY + \sphericalangle ADC = 180^\circ + \sphericalangle BAX.$$

Slijedi:

$$\sphericalangle YCD = \sphericalangle BAX.$$

Vrijedi omjer:

$$|AX| : |CY| = |AB| : |CD|. \tag{14}$$

Površina tetivnog četverokuta je:

$$\begin{aligned} P &= P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}|BC||AX| + \frac{1}{2}|AD||CY| = (\text{zbog } (14)) \\ &= \frac{1}{2}|BC||AX| + \frac{1}{2}\cdot\frac{|AD||AX||CD|}{|AB|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AB||BC| + |AD||CD|}{|AB|}|AX|. \end{aligned} \tag{15}$$

Iz pravokutnog trokuta ABX izrazimo duljinu visine $|AX|$:

$$|AX|^2 = |AB|^2 - |BX|^2. \tag{16}$$

U trokutu ABC redom vrijedi:

$$|AC|^2 - |CX|^2 = |AB|^2 - |BX|^2,$$
$$|AC|^2 - |AB|^2 = |CX|^2 - |BX|^2,$$
$$|BX| = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{|BC|} = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2b}.$$

Za dijagonalu $|AC| = e$ uvrstimo izraz (11) i sve uvrstimo u (16) te nakon sređivanja i zamjene (5) dobijemo

$$|AX| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{ab+cd}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Izraz za duljinu visine $|AX|$ na kraju stavimo u (15) pa formula za površinu glasi

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Zbog (13) konačno se dobije:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

□

Sada možemo pokazati kako izvodimo formulu (1). Primjenom svojstva (2) tangencijalnog četverokuta slijedi:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d$$

pa relacija (12) prelazi u (1):

$$P = \sqrt{abcd}.$$

Na primjer, za kvadrat vrijedi:

$$a = b = c = d \implies P = \sqrt{a^4} = a^2.$$

Peter D. Lax, dobitnik Abelove nagrade za 2005. g.

Sanja Marušić[1], *Zagreb*

Norveška akademija znanosti dodijelila je Abelovu nagradu za 2005. američkom matematičaru mađarskog porijekla Peteru D. Laxu. U današnje vrijeme uske specijalizacije matematičara važno je reći da se radi o jednom od posljednjih živućih znanstvenika koji objedinjuju sve osobine izvrsnog primijenjenog i teorijskog matematičara.

Kratak životopis



Peter D. Lax rođen je 1926. u Budimpešti. Zajedno sa svojim roditeljima 1941. emigrira u SAD gdje 1947. diplomira matematiku na New York University (NYU). Dvije godine kasnije doktorira na istom sveučilištu pod vodstvom mentora Kurta Friedrichsa temom *Nelinearni sustavi hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s dvije varijable*. Godine 1950. odlazi u Los Alamos gdje ostaje godinu dana. Nakon toga vraća se na NYU gdje počinje svoju doživotnu karijeru na Courant Institute of Mathematical Sciences na kojem je od 1972. do 1980. bio i direktor. Tijekom svoje bogate znanstvene karijere objavio je više od 200 znanstvenih radova iz raznih područja matematike od kojih su neki trajno obilježili razvoj moderne matematike. Bio je jedan od prvih koji su uočili značaj elektroničkih računala u matematici. Za svoj rad primio je brojne nagrade i počasti od kojih navodimo samo neke: Chauvenetova nagrada (1974.), Wienerova nagrada (1975.), National medal of science (1986.), Wolfova nagrada (1987.). Član je akademija znanosti SAD, Mađarske, Rusije, Kine i Francuske.

Ponešto o znanstvenoj aktivnosti P. D. Laxa

Glavnina znanstvenog opusa P. D. Laxa je u području diferencijalnih jednadžbi. Da bismo objasnili što je to diferencijalna jednadžba, recimo najprije što je to derivacija. Za one koji se još nisu susreli s derivacijama, bez puno matematičkih detalja, pojam derivacije opisujemo pomoću pojma brzine. Gibamo li se automobilom po ravnoj cesti i označimo li naš položaj na cesti u trenutku t s $x(t)$ dobili smo jednu realnu funkciju realne varijable koja broju t pridružuje broj $x(t)$. Očitamo li na brzinomjeru iznos brzine u trenutku t dobivamo broj $v(t)$ koji mjeri brzinu promjene naše funkcije

[1] Autorica je izvanredniprofesor na Katedri za primijenjenu matematiku Fakulteta prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: smarusic@fpz.hr

$x(t)$. U matematici takvu funkciju v nazivamo derivacijom funkcije x. Dakako, mogli bismo dati i preciznu matematičku definiciju, ali ona zahtijeva poznavanje pojma limesa, pa ne želimo time zamarati čitatelja. Znamo li brzinu v pa iz toga želimo odrediti položaj vozila, susrećemo se s diferencijalnom jednadžbom. Naime, u tom problemu mi želimo odrediti funkciju znajući njezinu derivaciju. Takve jednadžbe, kod kojih pomoću informacija o derivacijama neke funkcije želimo odrediti samu funkciju, zovu se diferencijalnim jednadžbama. Takve su jednadžbe iznimno značajne jer se javljaju u brojnim primjenama u fizici, tehnici, meteorologiji, biologiji, kemiji, prometu, medicini, ekonomiji i drugim područjima. Da bismo odredili položaj našeg vozila iz njegove brzine, nužno je znati njegov početni položaj. To je tzv. početni uvjet za diferencijalnu jednanžbu bez kojeg bi jednadžba imala beskonačno mnogo rješenja. U nekim situacijama nužno je zadati i/ili informacije o traženoj funkciji na rubovima skupa na kojem je rješavamo, tzv. rubni uvjet.

Najvažnija pitanja vezana uz diferencijalne jednadžbe su: da li ona ima rješenje (problem egzistencije rješenja), koliko ih ima (problem jedinstvenosti rješenja), koja od njih imaju stvarnog smisla u primjenama, a koja su nusprodukt matematičke teorije te kako doći do tog rješenja (ako ne egzaktnog, a onda barem približnog).

Jedan od najpoznatijih rezultata P. D. Laxa je glasoviti Lax Milgramov teorem koji daje odgovor na pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja određene klase diferencijalnih jednadžbi (konkretno, linearnih eliptičkih jednadžbi) uz zadani rubni uvjet.

Drugi značajni rezultat vezan je uz šok valove. Šok valovi su fizikalna pojava koja se može osjetiti kad avion probije zvučni zid, automobili na cesti uđu u zonu gustog prometa ili kad se u podzemnom ležištu nađu nafta i voda za koje znamo da se ne miješaju. Matematički gledano rješenja nekih diferencijalnih jednadžbi, tzv. hiperboličkih zakona sačuvanja, mogu imati singularitete i prekide koje nazivamo šokovima, tj. javljaju se plohe ili krivulje na kojima se rješenje vrlo brzo mijenja. Začetke matematičke teorije šok valova nalazimo još u Riemannovim radovima iz sredine 19. stoljeća. Riemann u svojem radu iz 1859. postavlja sljedeći problem: stavimo li dva plina različitih tlakova u rezervoar i odvojimo ih tankom membranom, što se dogodi kad ju uklonimo? Taj se problem, značajan za razumijevanje prirode šok valova, zove Riemannov problem. Tvorcima prave matematičke teorije šokova i, općenito, hiperboličkih zakona sačuvanja, začete sredinom 20. stoljeća, možemo smatrati američke matematičare Laxa i Glimma te njihove ruske kolege Godunova, Kružkova i Oleinikovu. Znano je da pojava šokova dovodi do gubitka jednistvenosti rješenja. Temeljno je pitanje kako izabrati ono koje ima fizikalnog smisla. Riemann nije znao odgovor na to pitanje i izabrao je krivo rješenje svog problema. Godine 1957. Peter D. Lax nalazi kriterij, zvan uvjet entropije, koji nam omogučuje odabir fizikalno relevantnog rješenja. Takva rješenje mogu imati samo dozvoljene vrste šokova tzv. Laxove šokove.

Nadalje, vrlo je značajan Laxov doprinos razvoju približnih, numeričkih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Najpoznatije metode koje nose njegovo ime su Lax-Wendroffova i Lax-Friedrichsova metoda.

Treći je znameniti Laxov doprinos proučavanju invarijantnih svojstava (prije svega linearnih) diferencijalnih jednadžbi. Za tzv. potpuno integrabilne jednadžbe Lax uvodi par operatora, danas znan pod imenom Laxov par, koji omogućuje proučavanje rješenja koja ostaju nepromijenjena ili invarijantna u vremenu, poput valova na vodi.

Bavi se i teorijom raspršenja gdje razvija teoriju koju nazivamo Lax-Philipsova teorija raspršenja. Zanimljivo je da ona danas nalazi neočekivane primjene u teoriji brojeva.

Bio je jedan od prvih koji su uočili da i u teorijskoj analizi diferencijalnih jednadžbi i drugih matematičkih objekata možemo vrlo uspješno koristiti računala.

Zbog njegovog neupitnog utjecaja na razvoj matematike možemo samo zaključiti da je i ovog puta Abelova nagrada došla u prave ruke.



ASTRONOMIJA

Gama-astronomija – posljednji elektromagnetski prozor u svemir

Dario Hrupec[1]*, Koprivnica*

Uvod – elektromagnetski spektar

Znanje o svemiru uglavnom se temelji na činjenicama do kojih se došlo opažanjem elektromagnetskog zračenja. Tek manji dio podataka dobiven je opažanjem nabijenih čestica (kozmičkog zračenja), drugih neutralnih čestica (neutrona i neutrina) te makroskopskih uzoraka nezemaljskog podrijetla koje su donijele svemirske letjelice ili su sami pali na Zemlju (meteoriti). Elektromagnetski spektar čine fotoni vrlo širokog spektra, od radiovalova najvećih valnih duljina preko mikrovalova, infracrvenog (toplinskog) zračenja, vidljive svjetlosti, ultraljubičastog zračenja, x (rendgenskog) zračenja do gama zračenja najkraćih valnih duljina. Podjela spektra obično se daje karakterizirajući fotone frekvencijama f ili valnim duljinama λ, no ovdje ćemo fotone karakterizirati njihovom energijom $E = hf = hc/\lambda$ izraženom u elektronvoltima.

PODRUČJE	ENERGIJA
radiovalovi	manje od 10 μeV
mikrovalovi	od 10 μeV do 1 meV
infracrveno	od 10 meV do 1 eV
vidljivo	od 1 eV do 10 eV (preciznije: od 1.77 eV do 3.10 eV)
ultraljubičasto	od 10 eV do 100 eV
rendgensko	od 100 eV do 100 keV
gama	više od 100 keV (preciznije: iznad 512 keV)

Tablica 1. Elektromagnetski spektar u energijskom području $(1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\ J)$.

Pojava novih astronomija

Istraživanje svemira dugo se temeljilo samo na opažanjima u vidljivom dijelu spektra (*optička astronomija*) – najprije golim okom, a zatim sve naprednijim optičkim teleskopima. Svaka pojava mogućnosti promatranja u ostalim dijelovima

[1] Autor je asistent u Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu, e-mail: dario.hrupec@irb.hr

elektromagnetskog spektra donosila je radikalno nove spoznaje. S obzirom da atmosfera propušta uglavnom vidljivu svjetlost i radiovalove, nakon optičke astronomije prva nova astronomija bila je *radioastronomija*. Radioteleskopi su poput optičkih teleskopa smješteni na površini Zemlje. Pojavom umjetnih satelita javila se mogućnost promatranja iznad površine Zemlje pa su počela promatranja u drugim područjima elektromagnetskog spektra. Slučajno otkriće snažnog kozmičkog zračenja u rendgenskom i gama-području, do kojeg je došlo u špijunskom traganju za nuklearnom aktivnošću na Zemlji, iz temelja je promijenilo naše poimanje svemira. Dok se prije smatralo da su izvori zračenja u svemiru gotovo isključivo termički uravnoteženi objekti poput zvijezda, postojanje snažnih izvora visokoenergijskog zračenja pokazalo je da postoje objekti i procesi neke nove vrste. U usporedbi s kozmičkim gama-zračenjem, kozmičko x-zračenje je većeg toka (broj fotona po jedinici površine u jedinici vremena), može prolaziti kozmološke udaljenosti (vide se i najudaljeniji objekti) te se može pod određenim uvjetima fokusirati pa je najprije procvala rendgenska astronomija. Za razvoj rendgenske astronomije, 2002. godine dodijeljena je Nobelova nagrada[2]. Tako je gama-područje ostalo posljednji elektromagnetski prozor u svemir koji treba otvoriti.

Gama-područje

Gama-zračenje iz svemira obuhvaća veći dio spektra nego sva ostala zračenja zajedno – čak 16 redova veličine, od 10^4 eV do 10^{20} eV. Tako veliki energijski raspon zahtijeva vrlo različite instrumente i detekcijske tehnike. Uobičajena je zato podjela gama-spektra na podpodručja.

PODRUČJE	ENERGIJA
LE niske energije	od 100 keV do 100 MeV
HE visoke energije	od 100 MeV do 100 GeV
VHE vrlo visoke energije	od 100 GeV do 100 TeV
UHE ultra visoke energije	od 100 TeV do 100 PeV
EHE ekstremno visoke energije	više od 100 PeV

Tablica 2. Podjela gama-spektra ($M = 10^6,\ G = 10^9,\ T = 10^{12},\ P = 10^{15}$).

Gama-sateliti

Gama-zračenje niskih i visokih energija (od 100 keV do 100 GeV) detektira se instrumetima smještenim na satelite. Prvi gama-sateliti bili su SAS-2 (1973.) i COS-B (1975. – 1982.). Izuzetno značajni pomak donio je EGRET (Energetic Gamma Ray

[2] Pogledajte članak Krešimira Pavlovskog, *Riccardo Giacconi: pionir rendgenske astronomije*, u trećem broju MFL-a, godište 2002./03.

Experiment Telescope) smješten na satelitu CGRO (Compton Gamma Ray Observatory) koji je bio aktivan od 1991. do 2000. U novije vrijeme aktivni su sateliti INTEGRAL (lansiran 2002.), SWIFT (lansiran 2004.) te još nekoliko manjih satelita koji su nedavno lansirani ili tek trebaju biti lansirani. Ipak, najviše nade polaže se u budući satelit GLAST (Gamma-ray Large Area Space Telescope) koji bi trebao biti lansiran 2007. godine. Osnovni elementi gama-detektora na satelitima su: (1) komora na iskre u kojoj se opažaju tragovi elektron-pozitron para koji je stvoren primarnim gama-fotonom[3], (2) kristal natrij-jodida koji služi kao kalorimetar u kojem se apsorbira energija elektron-pozitron para te (3) tzv. veto-detektor koji detektira prolaz nabijene čestice i omogućuje da se takvi događaji odbace. Nabijene čestice su kozmičke zrake koje su 10 000 puta učestalije od kozmičkih gama-fotona. Satelit GLAST će, kao predstavnik nove generacije gama-satelita, umjesto komore na iskre biti opremljen segmentiranim silicijskim detektorom (engl. *silicon strip detector*).



Slika 1. Umjetnički prikaz satelita GLAST za detekciju gama-zračenja iz kozmičkih izvora. Satelit će biti lansiran 2007. godine. (Izvor: NASA.)

Osnovna karakteristika satelitskih gama-detektora je relativno mala detekcijska površina (do 1 m^2). S obzirom da tok kozmičkog gama-zračenja (broj fotona po jedinici površine u jedinici vremena) naglo opada s energijom E (proporcionalan je s $1/E^{2.7}$) sateliti imaju gornji energijski prag od približno 20 GeV. GLAST će taj prag podići na 300 GeV.

Pljuskovi čestica u atmosferi

Gama-zračenje vrlo visokih energija (od 100 GeV do 100 TeV) detektira se indirektnim metodama pomoću instrumenata smještenih na površini Zemlje. U tom energijskom području gama-fotoni imaju dovoljnu energiju da pri ulasku u atmosferu izazovu elektromagnetski pljusak sekundarnih čestica: elektrona, pozitrona i fotona.

[3] Gama-fotoni energije ispod 1 MeV ne mogu stvarati elektron-pozitron parove, zato u tom području koristi tzv. Comptonov teleskop.

Takvi pljuskovi nastaju tipično na visinama oko 20 km i mogu se protezati od par kilometara pa sve do površine Zemlje. Slične pljuskove izaziva i kozmičko zračenje (nabijene atomske jezgre od protona do željeza) čija je učestalost veća 10 000 puta. Takve pljuskove zovemo hadronskim pljuskovima i oni osim elektrona i fotona sadrže još i mione, protone, neutrone, pione i druge čestice.

Problem je s nabijenim primarnim česticama (kozmičkim zračenjem) što skreću u galaktičkom i međugalaktičkom magnetskom polju na svojem putu od izvora do Zemlje. Zato se ne mogu povezati s izvorom[4]. S druge strane gama-zračenje putuje bez otklona u magnetskom polju i može se povezati s izvorom.

I hadronski i gama-pljuskovi u atmosferi sadrže mnoštvo nabijenih čestica koje se kroz zrak gibaju brzinom većom od brzine svjetlosti u zraku (koja je c/n gdje je n indeks loma zraka). Takve čestice stvaraju tzv. Čerenkovljevo zračenje što je elektromagnetska analogija zvučnog udara koji nastaje kad npr. supersonični avion probija zvučni zid. Čerenkovljevo zračenje pojedinog pljuska u atmosferi ima pogodne karakteristike za indirektnu detekciju kozmičkog gama-zračenja – vrlo je kratkotrajno i jako usmjereno.

Čerenkovljevi teleskopi



Slika 2. Teleskop MAGIC na La Palmi, Kanarsko otočje, koji je počeo s opažanjima krajem 2003. godine. Nedavno je započela gradnja drugog teleskopa. (Izvor: MAGIC.)

Čerenkovljevo zračenje danas ima veliku primjenu u visokoenergijskoj fizici, a nosi naziv prema ruskom fizičaru P. A. Čerenkovu koji ga je otkrio i za to dobio Nobelovu nagradu 1958. godine. Početkom 60-ih godina javila se ideja da se Čerenkovljevo zračenje, koje stvaraju pljuskovi u atmosferi izazvani upadom kozmičkog zračenja, iskoristi za indirektnu detekciju gama-fotona iz svemira. To je bio začetak ideje gama-astronomije. Bilo je potrebno trideset godina usavršavanja detekcijskih tehnika i teleskopa da se pouzdano detektira prvi visokoenergijski gama-izvor. Čerenkovljev

[4] Opservacijska znanost postaje **astronomija** tek onda kad utvrdi svoje izvore zračenja. Tako je gama-astronomija rođena prije 15 godina, a rođenje se neutrinske astronomije očekuje uskoro.

teleskop sastoji se od segmentiranog zrcala koje reflektira Čerenkovljevu svjetlost u kameru sastavljenu od fotomultiplikatora. Elektronika kojom se digitalizira signal mora biti vrlo brza jer Čerenkovljeva svjetlost iz jednog pljuska dolazi u vrlo kratkom pulsu trajanja svega par nanosekundi.

Tehnika detekcije koja je omogućila lociranje prvog visokoenergijskog gama-izvora i nagli razvoj visokoenergijske gama-astronomije temelji se na analizi slika (engl. *imaging*) koje Čerenkovljeva svjetlost iz pljuskova stvara u kameri teleskopa. Najvažniji teleskop druge generacije Čerenkovljevih teleskopa bio je teleskop HEGRA na kanarskom otoku La Palmi. HEGRA je zapravo bio sustav od pet teleskopa kojim je po prvi put uvedena tehnika stereo-opažanja[5] 1997. Ta je tehnika omogućila daljnja poboljšanja karakteristika Čerenkovljevih teleskopa i time otkrića mnogih novih izvora. HEGRA je bila aktivna do 2003. godine nakon čega su dva njezina teleskopa dopremljena u Institut "Ruđer Bošković" u Zagrebu. Ta dva teleskopa bit će baza budućeg opservatorija CROATEA (Cosmic Ray Observatory at the Eastern Adriatic) čime će se Hrvatska uključiti u mali broj zemalja koje se suvereno bave visokoenergijskom astrofizikom čestica. Treća generacija Čerenkovljevih teleskopa u fazi je dovršetka i probnog rada. Čine ju teleskopi: MAGIC na La Palmi, H.E.S.S. u Namibiji, VERITAS u Arizoni te CANGAROO III u Australiji.

Ostali detektori kozmičkog gama-zračenja smješteni na površini Zemlje

Kozmičko zračenje najviših energija (više od 100 TeV) detektira se indirektnim metodama s površine Zemlje, no u tom je energijskom području teško razlučiti primarne game od nabijenih čestica pa tako ne postoje utvrđeni izvori i područje nema status astronomije. Pljuskovi čestica u atmosferi koje stvaraju kozmičke zrake najviših energija protežu se do površine Zemlje pa je osim Čerenkovljevog zračenja moguće detektirati sekundarne čestice (mione, elektrone, hadrone) detektorima na površini Zemlje kao npr. u eksperimentu u Karlsruheu. Za detekciju kozmičkog zračenja najviših energija (oko 10^{20} eV) potrebni su detektori koji pokrivaju ogromne površine. Najveći takav eksperiment danas je AUGER u Argentini koji je još u gradnji, a čiji će detektori biti rasprostranjeni na čak 3000 km^2. AUGER koristi Čerenkovljevo zračenje za detekciju, ali ne ono koje nastaje u atmosferi, nego Čerenkovljevo zračenje koje u posebnim rezervoarima vode stvaraju sekundarne čestice koje dospijevaju do površine Zemlje. Prvi rezultati pokazuju da bi događaji najviših energija (čak 10^{21} eV) mogli biti izazvani upadom primarnog gama-fotona.

Galaktički izvori kozmičkog gama-zračenja

Prvi pouzdano detektirani visokoenergijski gama izvor bila je Rakova maglica, 1989. godine, otkrivena Čerenkovljevim teleskopom Whipple smještenim u Arizoni. Rakova maglica udaljena je od nas 6500 svjetlosnih godina. To je ostatak supernove čiju su eksploziju 1054. godine zabilježili kineski astronomi kao iznenadnu pojavu nove, vrlo sjajne zvijezde na nebu. Eksplozija supernove je završni stadij u evoluciji vrlo masivne zvijezde. Udarni val koji pri eksploziji nastaje širi se u okolni prostor još dugi niz

[5] Dva ili više teleskopa promatraju isti pljusak u atmosferi i događaj se prihvaća ako su ga istovremeno opazila barem dva teleskopa.

godina. Nabijene čestice u udarnom valu bivaju ubrzane praktički do brzine svjetlosti. Elektroni mogu doseći energije i do 100 TeV (masa mirovanja im je samo 0.5 MeV) pa ih zovemo ultrarelativističkim elektronima. Takvi elektroni koji na svom putu nalete na niskoenergijske fotone (npr. mikrovalno pozadinsko zračenje koje je sveprisutno) mogu fotonima predati veliki dio svoje energije stvarajući tako gama-zračenje visokih i vrlo visokih energija. Ovaj se proces zove inverzno Comptonovo raspršenje i glavni je izvor visokoenergijskog gama-zračenja koje emitiraju ostaci supernova. Rakova maglica najjači je galaktički izvor čiji je nepromjenjivi tok visokoenergijskog gama-zračenja dobro utvrđen tako da je izvor dobio status tzv. standardne svijeće. Svaki Čerenkovljev teleskop na sjevernoj hemisferi povremeno promatra Rakovu maglicu. Jedinica za tok visokoenergijskog gama-zračenja dobila je po Rakovoj maglici naziv "crab". Osim Rakove maglice danas su poznati i drugi *ostaci supernova*. U njihovim središtima obično se nalaze *pulsari*, brzorotirajuće neutronske zvijezde koje ostaju nakon eksplozija supernova. Pulsari su ekstremni objekti čija brzorotirajuća snažna polja također uzrokuju ubrzavanje nabijenih čestica do vrlo visokih energija. Pulsari ponekad emitiraju i jednu vrstu erupcija gama-zraka. Ostaci supernova i pulsari su galaktički izvori visokoenergijskog gama-zračenja, što znači da su smješteni unutar naše galaktike.

Izvangalaktički izvori kozmičkog gama-zračenja

Nakon što je osjetljivost atmosferskih Čerenkovljevih teleskopa dosegla dovoljnu granicu, 1992. godine detektiran je i prvi izvangalaktički izvor visokoenergijskog gama-zračenja, Markarijan 421, aktivna galaktička jezgra udaljena od nas oko 500 milijuna svjetlosnih godina. Godine 1995. otkriven je na drugom dijelu neba i drugi izvor, Markarian 501 na sličnoj udaljenosti. Oba izvora otkrivena su teleskopom Whipple. Do danas je poznato oko 10 takvih izvora, a uskoro se očekuje veliki porast broja otkrića s obzirom da treća generacija Čerenkovljevih teleskopa upravo počinje s radom. Gotovo sve aktivne galaktičke jezgre koje su izvori visokoenergijskog gama-zračenja su *blazari*. Osnovna karakteristika blazara je brza promjenjivost toka zračenja u širokom spektru valnih duljina, od radiovalova do visokoenergijskih gama-zračenja. Vremenska promjena toka može biti reda veličine sata što znači da je objekt veličine reda svjetlosnog sata – manje od veličine Sunčevog sustava. S druge strane, masa aktivne galaktičke jezgre iznosi par stotina milijuna masa Sunca što znači da se radi o izuzetno kompaktnom objektu. Postoji više teorija o prirodi takvih objekata, no objašnjenje koje ima neusporedivo najviše izgleda da bude točno jest da se u središtima aktivnih galaktičkih jezgara nalaze supermasivne crne rupe. Vjerojatno se u središtima svih galaktika, pa i u našoj, nalaze supermasivne crne rupe, ali je akrecija[6] mala pa jezgra takve galaktike nije aktivna.

Aktivna galaktička jezgra sastoji se od supermasivne crne rupe, akrecijskog diska i dva ultrarelativistička mlaza na osi rotacije. Kod blazara je jedan od mlazova usmjeren prema nama. Druga vrsta izvangalaktičkih izvora gama-zračenja su erupcije gama-zračenja (engl. GRB – *gamma ray burst*). Njihove su energije uglavnom u području dostupnom satelitima, no nova generacija Čerenkovljevih teleskopa niskog energijskog praga (desetak GeV) mogla bi dati značajan doprinos istraživanju ovih pojava. Teleskop MAGIC na La Palmi konstruiran je tako da vrlo brzo može reagirati na dojavu o erupciji gama-zračenja i usmjeriti svoju aktivnost u taj dio neba. Samo mali dio

[6] Akrecija je prirast mase svemirskog tijela, pojava pri kojoj zbog snažne gravitacije postoji tok tvari iz okoline prema tom tijelu. Zbog zakona očuvanja kutne količine gibanja formira se tzv. akrecijski disk.

erupcija gama-zračenja dolazi s pulsara i mehanizam njihovog nastanka je manje-više poznat. Međutim, erupcije gama-zračenja izvangalaktičkog podrijetla s pravom nose epitet najsjajnijih i najtajanstvenijih pojava u svemiru[7].



Slika 3. Umjetnički prikaz aktivne galaktičke jezgre. (Izvor: NASA.)

Budućnost gama-astronomije

Nova, treća generacija Čerenkovljevih teleskopa (MAGIC, HESS, VERITAS i CANGAROO-III) u završnoj je fazi izgradnje. Neki su teleskopi već dovršeni te su počeli s opažanjima, a ostali će biti dovršeni tijekom idućih nekoliko godina. Satelit GLAST, prvi iz nove generacije gama-satelita, također je u završnoj fazi izgradnje. Lansiranje se planira početkom 2007. godine.

Iz povijesti znanosti poznato je da je dosad svaka radikalno nova vrsta znanstvenih instrumenata donosila nova znanstvena otkrića. Zato se opravdano vjeruje da će nova generacija detektora kozmičkog gama-zračenja u idućih deset godina donijeti mnoge nove spoznaje i otkriti novu, zasad nepoznatu, fiziku.

Više informacija o vodećim eksperimentima u području visokoenergijske gama-astronomije možete naći na web stranicama:

`http://magic.mppmu.mpg.de/`
`http://www.mpi-hd.mpg.de/HESS/`
`http://veritas.sao.arizona.edu/`
`http://icrhp9.icrr.u-tokyo.ac.jp/c-iii.html`
`http://www-glast.stanford.edu/`

[7] Pogledajte članak Nevena Soića, *Erupcije γ -zraka – najsjajnije i najtajanstvenije pojave u svemiru*, u četvrtom broju MFL-a, godište 2004./05.



ZABAVNA MATEMATIKA

Točke u kvadratu

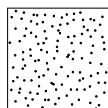
Prvi sat matematike u novoj školskoj godini profesor Polak, kojeg učenici od milja zovu Polako, uvijek počinje zadavanjem zadatka iz zabavne matematike. Tako je bilo i ovaj put. Crtao je na ploči kvadrat i polako govorio:

— Znam da su vam mozgovi još na odmoru, ali polako ih uključite. Ovo je kvadrat stranice duljine 20 cm i u njemu je istaknuta 101 točka.

— Sad slijedi “bomba” — čulo se iz zadnje klupe.

— Što trebate učiniti? Trebate pokazati da postoji barem 5 od tih točaka koje se nalaze u krugu polumjera 3 cm. Na posao, ali polako!

Možda zadatak i nije težak. Što vi mislite?



Mala zbrajaljka

Pogledajte pažljivo donji račun zbrajanja. Jasno je da *TRI* i *PET* uvijek daju *OSAM*, ali postoji mogućnost zamjena slova *A*, *E*, *I*, *M*, *O*, *P*, *R*, *S* i *T* brojkama 0 do 9 tako da i na taj način račun bude ispravan.

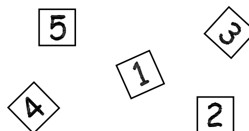
Kombinirajte malo i pronađite one dvije zamjene u kojima broj *AEIMOPRST* poprima najmanju, odnosno najveću vrijednost.

```
   TRI
 + PET
 -----
  OSAM
```

Igra

Brat i sestra igraju zanimljivu igru nadmetanja. Oni ispisuju osamnaesteroznamenkasti broj koristeći samo znamenke 1, 2, 3, 4 i 5. Brat piše prvu znamenku, sestra drugu i tako naizmjenično. Pritom sestra želi da konačni broj bude djeljiv s 9, a brat nastoji da to onemogući.

Može li sestra pobijediti?

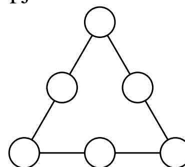


Brojevi i trokut

Na stranicama trokuta je ukupno šest kružića. U te kružiće upišite brojeve 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tako da zbroj triju brojeva na svakoj stranici trokuta bude

a) 11, b) 12.

Jeste li uspjeli?



Zemljište

Tri brata odluče kupiti zemljište vrijedno 340 000 kuna za gradnju kuće i podizanje imanja, ali ni jedan nije imao dovoljno novaca.

— Dajte mi svaki polovinu svote koju imate i imat ćemo potrebnu svotu — rekao je prvi brat.

— Bolje da svaki od vas dade meni samo trećinu svoje svote i opet će biti dovoljno — rekao je drugi brat.

— Ne, braćo, dovoljno je da svaki od vas doda mojoj svoti četvrtinu svoje i zemljište je naše — bile su riječi trećega brata.

Koliko je novaca imao svaki od trojice braće?



Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2005. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/223.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće stranice omota.*

A) Zadaci iz matematike

2951.* Nađi sve proste brojeve p takve da je $2p+1$ potpun kub.

2952.* Pokaži da jednadžba

$$x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0$$

nema cjelobrojno rješenje.

2953. a) Ako su a, b, c i d prirodni brojevi, pokažite da vrijede jednakosti

$$(a^2+163b^2)(c^2+163d^2)$$
$$=(ac-163bd)^2+163(bc+ad)^2$$
$$=(ac+163bd)^2+163(bc-ad)^2,$$

tj. da je skup $A=\{a^2+163b^2 \mid a,b\in\mathbf{N}\}$ zatvoren u odnosu na množenje.

b) Ako je $p=a^2+163b^2$ prost broj, dokaži da je par prirodnih brojeva (a,b) jednoznačno određen.

2954.* Nađi sva pozitivna rješenja sistema jednadžbi

$$\frac{x_2x_3x_4}{x_1}=1,$$
$$\frac{x_1x_3x_4}{x_2}=4,$$
$$\frac{x_1x_2x_4}{x_3}=16,$$
$$\frac{x_1x_2x_3}{x_4}=36.$$

2955. Nađi sva cjelobrojna rješenja (a,b,c) jednadžbe

$$\binom{a}{2}+\binom{b}{2}=\binom{c}{2},$$

takva da je $2\le a\le b\le c$.

* Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

2956. Neka su z_1, z_2, z_3, z_4 kompleksni brojevi, takvi da je $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$ i $z_1+z_2+z_3+z_4=0$. Dokaži jednakost

$$z_1^{3^n}+z_2^{3^n}+z_3^{3^n}+z_4^{3^n}=0,$$

za svaki prirodan broj n.

2957.* Točke P, Q, R, S su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ četverokuta $ABCD$. Pokaži da je $PQRS$ paralelogram.

2958.* Unutar jednakostraničnog trokuta ABC dana je točka P za koju vrijedi

$$|CP|^2=|AP|^2+|BP|^2.$$

Dokaži da je kut $\sphericalangle BPA=150^\circ$.

2959. Dan je pravokutan trokut ABC s visinom $\overline{CD}$ na hipotenuzu. Polumjere trokutima ABC, ACD i CBD upisanih kružnica označimo redon s r, r_1 i r_2. Dokaži da je $r^2=r_1^2+r_2^2$.

2960. Dane su tri kružnice koje se ne sijeku i nijedna nije sadržana u nekoj drugoj. Svako od tri središta kružnica spojeno je sa sjecištem unutarnjih tangenata drugih dviju. Dokaži da se te tri dužine sijeku u istoj točki.

2961. Sve strane trostrane piramide su šiljastokutni trokuti sa stranicama duljina a, b i c.

a) Dokaži da je volumen te piramide jednak

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

b) Ako je h visina te piramide, dokaži jednakost

$$\frac{2}{h^2}=\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}.$$

2962. Paralelne stranice trapeza $ABCD$ su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dokaži jednakost

$$\frac{|AB|^2-|BC|^2+|AC|^2}{|CD|^2-|AD|^2+|AC|^2}=\frac{|AB|^2-|AD|^2+|BD|^2}{|CD|^2-|BC|^2+|BD|^2}=\frac{|AB|}{|CD|}.$$

2963. Dane su tri jednake kutije. U prvoj se nalazi a bijelih i b crnih, u drugoj c bijelih i d crnih, a u trećoj su sve kuglice bijele. Na slučajan način se bira kutija i iz nje izvlači kuglica. Kolika je vjerojatnost da izvučena kuglica bude bijela?

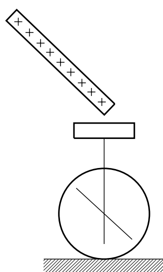
2964. Na susretu mladih matematičara mnogi sudionici su se međusobno rukovali. Dokaži da je broj onih koji su se rukovali s neparnim brojem drugih, paran.

B) Zadaci iz fizike

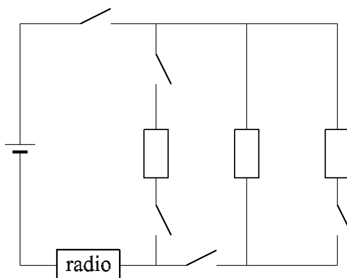
OŠ – 234. Branimir treba odrediti gustoću nepoznate tekućine. U posudu ulije vodu do visine 12 cm. Kad u istu posudu ulije jednaku masu nepoznate tekućine, visina tekućine je 15.5 cm. Kolika je gustoća nepoznate tekućine?

OŠ – 235. Profesor Mudrić pomaže prijatelju u gradnji kuće. Odlučili su za krov kupiti crijep kvadratnog oblika dimenzija $25\ \text{cm} \times 25\ \text{cm}$. Kod slaganja se prekrije $1/5$ crijepa po dužini i po širini. Koliko komada crijepa je profesor Mudrić izračunao da treba kupiti ako je površina krova $150\ \text{m}^2$, a odlučili su ga kupiti 4% više za slučaj da se neki razbiju kod transporta?

OŠ – 236. Neutralnom elektroskopu primaknemo pozitivno nabijeni štap, ali ga ne dodirnemo. Nacrtaj kako će se raspodijeliti naboj na elektroskopu. (Elektroskop se sastoji od metalne pločice koja je spojena na metalni držač i kazaljku i sve je to preko plastičnog prstena umetnuto na kućište.)



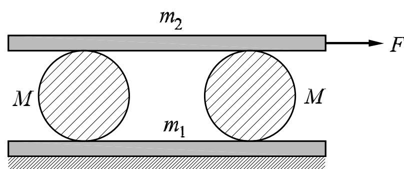
OŠ – 237. Na slici je prikazan električni krug u koji su spojeni radio otpora $40\ \Omega$, kojeg je Hana napravila, pet prekidača, tri otpornika otpora $50\ \Omega$ i baterije od 4.5 V. Svi prekidači su otvoreni tako da struja ne može teći kroz njih. Koliko najmanje prekidača Hana treba zatvoriti da struja proteče kroz radio? Kolika će biti jakost struje? Kako može izmjeriti tu struju pomoću ampermetra?



1315. Posuda mase 0.07 kg, napunjena je do vrha tekućinom gustoće $2500\ \text{kg/m}^3$ i obješena o oprugu koja se zbog opterećenja istegnula. Nakon toga posuda je skinuta s opruge i obješena je druga ista takva, koja je do $\frac{3}{4}$ svoje visine napunjena tekućinom gustoće $4000\ \text{kg/m}^3$. Istezanje opruge je u drugom slučaju za 10% veće nego u prvom. Odredite volumen posude.

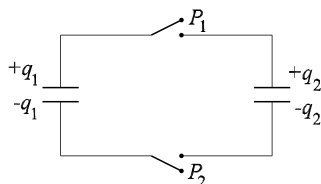
1316. Vagon duljine 3.6 m giba se brzinom $15\ \text{m/s}$. Iz pravca okomitog na smjer gibanja vagona doleti puščano zrno i probija oba zida vagona. Mjesto na zidu vagona u koje je zrno prvo udarilo, od početka vagona udaljeno je 1 m. Koliko je od početka vagona udaljeno mjesto na suprotnom zidu kroz koje je prošlo zrno? Brzina metka je $600\ \text{m/s}$. Kako bi se trebao gibati vagon da ovo mjesto bude udaljeno od početka vagona 0.95 m?

1317. Na glatkoj horizontalnoj podlozi nalazi se daska mase m_1 i dva ista valjka mase M i polumjera R, a preko njih je položena druga daska mase m_2. U početnom trenutku sistem je postavljen simetrično i miruje. Na gornju dasku počne djelovati sila F u horizontalnom smjeru. Odredite ubrzanja dasaka ako se valjci gibaju bez proklizavanja.



1318. Na pločama dva ravna pločasta kondenzatora, kapaciteta C_1 i C_2, nalaze se naboji q_1 i q_2. Pokažite da će se ukupna elektrostatička energija sistema smanjiti ako paralelno spojimo kondenzatore istovremenim zatvaranjem prekidača P_1 i P_2. Gdje se gubi

energija? Nađite uvjet pri kojem nema gubitka energije.



1319. Vodljivi okvir u obliku kvadrata stranice 15 cm nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije 0.8 T okomitom na ravninu okvira. Zatim se okvir, ostajući u istoj ravnini prepravi u oblik pravokutnika s omjerom stranica 1 : 2. Naći naboj koji protekne kroz okvir pri ovoj promjeni oblika. Otpor okvira iznosi 2 Ω.

1320. Snop elektrona koji se kreće brzinom 106 m/s pada na nenabijenu izoliranu metalnu kuglu polumjera 5 cm. Koliki je najveći broj elektrona koji se može skupiti na kugli?

1321. Horizontalno postavljena daska harmonijski titra u horizontalnom pravcu s amplitudom 10 cm. Odredite koeficijent trenja μ između daske i tijela koje stoji na njoj, ako tijelo počne kliziti po dasci tek kada se period titranja smanji na 1 s.

C) Rješenja iz matematike

2923. *Nađi sva realna rješenja sistema jednadžbi*

$$(x+y)^3 = z, \qquad (1)$$
$$(y+z)^3 = x, \qquad (2)$$
$$(z+x)^3 = y. \qquad (3)$$

Rješenje. Oduzmimo (1) i (2):

$$\Big[(x+y)-(y+z)\Big]\Big[(x+y)^2 + (x+y)(y+z)+(y+z)^2\Big] = -(x-z),$$

$$(x-z)\Big[(x+y)^2+(x+y)(y+z) + (y+z)^2+1\Big] = 0.$$

Kako je

$$(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2+1 = \left[x+y+\frac{y+z}{2}\right]^2 + \frac{3}{4}(y+z)^2+1>0,$$

$\forall x,\ y,\ z \in \mathbf{R}$ slijedi $x = z$.

Analogno je $y = z$ (iz (1) i (3)) tj. $x = y = z$.

Sada u (1) imamo

$$(2x)^3 = x, \qquad x(8x^2-1) = 0,$$

odakle je

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad x_3 = \frac{-\sqrt{2}}{4}.$$

Provjerom dobivamo da to zbilja jesu rješenja:

$$(x,y,z) \in \left\{(0,0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{4}\right)\right\}.$$

Luka Rimanić (2),
Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka

2924. *Ako su x, y, z realni brojevi za koje vrijedi*

$$x+y+z=5,$$
$$xy+yz+zx=3,$$

dokaži nejednakost

$$-1 \le z \le \frac{13}{3}.$$

Prvo rješenje. Iz $(x-y)^2 \geqslant 0$ dobivamo

$$(x+y)^2 \geqslant 4xy. \qquad (1)$$

Sada imamo

$$x+y = 5-z, \qquad (2)$$
$$xy = 3 - z(x+y),$$
$$xy = 3-z(5-z),$$
$$xy = 3-5z+z^2. \qquad (3)$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobiva se:

$$(5-z)^2 \geqslant 4(3-5z+z^2),$$
$$-3z^2+10z+13 \geqslant 0. \qquad (4)$$

Rješavanjem jednadžbe

$$-3z^2+10z+13 = 0$$

dobivamo $z_1 = \dfrac{13}{3}$ i $z_2 = -1$, tj. rješenje nejednadžbe (4) je $z \in \left[-1, \dfrac{13}{3}\right]$, čime je dokaz gotov.

Filip Topić (3),
Gimnazija "Varaždin", Varaždin

Drugo rješenje. Iz prve jednadžbe imamo:

$$x = 5 - y - z.$$

Uvrstimo li to u drugu imamo:

$$(5 - y - z)y + yz + z(5 - y - z) = 3,$$
$$y^2 - y(5 - z) + z^2 - 5z + 3 = 0.$$

Kako je $y \in \mathbf{R}$, $D \geqslant 0$ tj.:

$$\begin{aligned} D &= [-(5 - z)^2] - 4(z^2 - 5z + 3) \\ &= -3z^2 + 10z + 13 \\ &= (z + 1)(13 - 3z) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Slijedi $-1 \leqslant z \leqslant \dfrac{13}{3}$ što je i trebalo dokazati.

Luka Rimanić (2), Rijeka

2925. *Ako su r, r_a, r_b i r_c polumjeri trokutu upisane i pripisanih kružnica za koje vrijedi*

$$\sqrt{r_a} + \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c} = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r},$$

dokaži da je trokut jednakostraničan.

Rješenje. Vrijedi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a}\right) \\ &\overset{\text{A-G}}{\geqslant} \frac{1}{\sqrt{r_a r_b}} + \frac{1}{\sqrt{r_b r_c}} + \frac{1}{\sqrt{r_c r_a}} \\ &= \frac{\sqrt{r_a} + \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c}}{\sqrt{r_a r_b r_c}} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Kako zbog (1) vrijedi jednakost zaključujemo da su svi jednaki tj. $r_a = r_b = r_c$, odnosno $a = b = c$ te je trokut jednakostraničan.

Luka Rimanić (2), Rijeka

2926. *Riješi nejednadžbu*

$$\frac{1}{5}5^{2x}7^{3x+2} \leq \frac{25}{7}7^{2x}5^{3x}.$$

Rješenje. Dana jednadžba je ekvivalentna sljedećima:

$$5^{2x-1}7^{3x+2} \leqslant 7^{2x-1}5^{3x+2},$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{3x+2} \leqslant \left(\frac{7}{5}\right)^{2x-1}.$$

Kako je $\dfrac{7}{5} > 1$ imamo

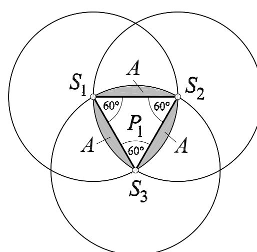
$$3x + 2 \leqslant 2x - 1$$

odakle je $x \leqslant -3$ tj. rješenje je $x \in \langle -\infty, -3]$.

Luka Rimanić (2), Rijeka

2927. *Svaka od tri jednake kružnice polumjera r prolazi kroz središta dviju preostalih. Kolika je površina zajedničkog dijela za sve tri kružnice?*

Rješenje. Skica.



$\triangle S_1S_2S_3$ je jednakostraničan s duljinom stranice r te je njegova površina jednaka

$$P_1 = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Površina zajedničkog dijela je jednaka

$$P = 3A + P_1$$

gdje je A površina kružnog odsječka između S_1 i S_2.

$$\begin{aligned} A &= \frac{r^2\pi}{6} - P_1, \\ P &= \frac{r^2\pi}{2} - 2P_1 = \frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Luka Rimanić (2), Rijeka

2928. *U trokutu ABC točke D, E i F su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, a točka G je nožište visine iz vrha C. Dokaži da su jednake duljine polumjera trokutima DEF i DEG upisanih kružnica.*

Rješenje.

Točka E je središte opisane kružnice pravokutnog trokuta ACG:

$$|EG| = |EA| = \frac{b}{2}.$$

Točka D je središte opisane kružnice pravokutnog trokuta BCG:

$$|DG| = |DC| = \frac{a}{2}.$$

Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{DF}$ su srednjice trokuta ABC pa je $|EF| = \frac{a}{2}$, $|DF| = \frac{b}{2}$. Sada je $\triangle DEF \cong \triangle DEG$ jer su im sve tri stranice jednake ($|DG| = |EF|$, $|EG| = |DF|$, $\overline{DE}$ zajednička). Zato su im polumjeri upisanih kružnica jednaki što je trebalo dokazati.

Mirko Čorić (3),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

2929. *Neka je $ABCD$ četverokut, $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $\sphericalangle ABC = \alpha$, $\sphericalangle BCD = \beta$. Dokaži da vrijedi ovaj teorem o kosinusima za četverokut*

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ac\cos(\alpha+\beta).$$

Rješenje. Skica.

Uz oznake na slici iz $\triangle ABC$ imamo:

$$a\sin\alpha = e\sin\beta_1, \qquad (1)$$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Iz $\triangle ACD$ imamo:

$$\begin{aligned}
d^2 &= e^2 + c^2 - 2ec\cos(\beta - \beta_1),\\
&\overset{(2)}{=} a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha\\
&\quad - 2ec\cos\beta\cos\beta_1 - 2ec\sin\beta\sin\beta_1\\
&\overset{(1)}{=} a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha\\
&\quad - 2ac\sin\alpha\sin\beta - 2ec\cos\beta\cos\beta_1\\
&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha\\
&\quad + 2ac\cos(\alpha+\beta) - 2c\cos\beta(a\cos\alpha + e\cos\beta_1).
\end{aligned}$$

Kako općenito u trokutu sa stranicama a, b i c i nasuprotnim kutovima α, β i γ vrijedi

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

u $\triangle ABC$ je

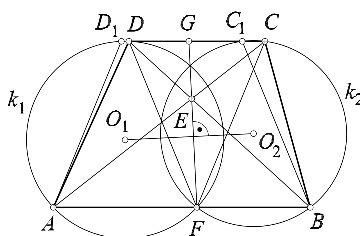
$$b = a\cos\alpha + e\cos\beta_1,$$

odakle dobivamo traženu jednakost.

Luka Rimanić (2), Rijeka

2930. *Neka je F točka na bazi $\overline{AB}$ trapeza $ABCD$ takva da je $|DF| = |CF|$, $E = AC \cap BD$, a O_1 i O_2 središta trokutima ADF i FBC opisanih kružnica. Dokaži da su pravci EF i O_1O_2 međusobno okomiti.*

Rješenje.



Neka se dane kružnice k_1 i k_2 sa središtima O_1 i O_2 sijeku u točkama P i Q. Kao što je poznato $PQ \perp O_1O_2$. Ako dva pravca kroz točku L sijeku k_1 i k_2 u točkama A, B i C, D, tada je $L \in PQ$ ako i samo ako je

$$|LA| \cdot |LB| = |LC| \cdot |LD|.$$

Neka su sada k_1 i k_2 kružnice opisane trokutima AFD i FBC te $G = FE \cap CD$. Označimo s C_1 i D_1 točke na DC takve da je $AD_1 \| FC$ i $BC_1 \| DF$, tj. četverokut

$AFCD_1$ i $BFDC_1$ su paralelogrami. Kako je $|FD| = |FC|$ imamo

$$\sphericalangle CFB = \sphericalangle FCD = \sphericalangle FDC = \sphericalangle BGC.$$

To znači da F, B, C i C_1 leže na kružnici i pravac DC siječe k_2 u C i C_1. Analogno,

$$\sphericalangle AFD = \sphericalangle FDC = \sphericalangle FCD = \sphericalangle AD_1D$$

i pravac DC siječe k_1 u D i D_1. Pravac FE je okomit na O_1O_2 ako i samo ako je

$$|GC| \cdot |GC_1| = |GD| \cdot |GD_1|.$$

Iz $\triangle GCE \sim \triangle FAE$, $\triangle GDE \sim \triangle FBE$ i $\triangle DCE \sim \triangle BAE$ slijedi

$$\frac{|GC|}{|AF|} = \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|DC|}{|AB|}$$

i

$$\frac{|GD|}{|BF|} = \frac{|DE|}{|EB|} = \frac{|DC|}{|AB|}.$$

Odavde je

$$|GC| = \frac{|DC| \cdot |AF|}{|AB|} \quad \text{i} \quad |GD| = \frac{|BF| \cdot |DC|}{|AB|}.$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} |GC_1| &= ||DC_1| - |DG|| = ||BF| - |DG|| \\ &= |BF|\left|1 - \frac{|DG|}{|BF|}\right| \\ &= |BF|\left|1 - \frac{|DC|}{|AB|}\right| = \frac{|BF|}{|AB|}||AB| - |DC|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |GD_1| &= ||CD_1| - |CG|| = ||AF| - |CG|| \\ &= |AF|\left|1 - \frac{|CG|}{|AF|}\right| \\ &= |AF|\left|1 - \frac{|DC|}{|AB|}\right| = \frac{|AF|}{|AB|}||AB| - |DC||. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} |GC| \cdot |GC_1| &= \frac{|DC| \cdot |AF| \cdot |BF|}{|AB|^2}||AB| - |DC|| \\ &= |GD| \cdot |GD_1|. \end{aligned}$$

Ur.

2931. *Dokaži da u svakom trokutu sa stranicama duljina a, b, c, nasuprotnim kutovima α, β, γ i polumjerom opisane kružnice R vrijedi relacija*

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \frac{abc}{2R^2}.$$

Prvo rješenje. Izrazimo $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ po kosinusovom poučku i napišimo lijevu stranu drugačije:

$$\begin{aligned} &a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma \\ &= \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc} + \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac} \\ &\quad + \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab} \\ &= \frac{1}{2abc}\Big[a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2) \\ &\quad +c^2(a^2+b^2-c^2)\Big] \\ &= \frac{1}{2abc}\Big(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2 \\ &\quad -2b^2c^2+4b^2c^2\Big) \\ &= \frac{1}{2abc}[(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2] \\ &= \frac{1}{2abc}[(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)] \\ &= \frac{1}{2abc}[((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)] \\ &= \frac{1}{2abc}(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= \frac{1}{2abc}(2s-2a)(2s)(2s-2b)(2s-2c) \\ &= \frac{16}{2abc}s(s-a)(s-b)(s-c) \\ &= \frac{16P^2}{2abc} = \frac{abc}{2R^2}. \end{aligned}$$

Filip Topić (3), Varaždin

Drugo rješenje. Prvo ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju:

$$\begin{aligned} &\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \\ &= (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin 2[180^\circ - (\alpha+\beta)] \\ &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \sin 2(\alpha+\beta) \\ &= 2\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\ &= 2\sin\gamma \cdot 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \\ &= \frac{a}{\sin\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{b}{\sin\beta}\sin\beta\cos\beta \\ &\quad + \frac{c}{\sin\gamma}\sin\gamma\cos\gamma \end{aligned}$$

$$= R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$
$$\stackrel{(1)}{=} 4R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$
$$= 4R\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2}.$$

Luka Rimanić (2), Rijeka

2932. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju uvjet*

$$ab + bc + ca = 1.$$

Dokaži da je

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{c} = \pi.$$

Rješenje. Označimo $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}$, $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b}$, $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{c}$. Tada $ab + bc + ca = 1$ postaje

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Dalje je:

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$/ \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$
$$\cos\beta(\cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma)$$
$$+ \sin\beta(\cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma) = 0,$$
$$\cos\beta \sin(\alpha + \gamma) + \sin\beta \cos(\alpha + \gamma) = 0,$$
$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \implies \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Zbog pozitivnosti a, b i c, α, β i γ pripadaju intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pa su druga dva rješenja, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ i $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, nemoguća.

Filip Topić (3), Varaždin

2933. *Ako su a, b i α realni brojevi takvi da je*

$$\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b},$$

odredi

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3}$$

Rješenje. Pomnožimo li zadanu jednakost s $(a + b)$ imamo:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \frac{b}{a}\sin^4\alpha + \frac{a}{b}\cos^4\alpha - 1 = 0,$$

$$(1 - \cos^2\alpha)^2 + \cos^4\alpha + \frac{b}{a}(1 - \cos^2\alpha)^2$$
$$+ \frac{a}{b}\cos^4 - 1 = 0,$$
$$(\cos^2\alpha)^2\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$
$$- \cos^2\alpha \cdot 2\left(\frac{b}{a} + 1\right) + \frac{b}{a} = 0,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\frac{b}{a} + 1}{2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = \frac{b}{a+b} \implies$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b},$$
$$\frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{b}{(a+b)^4},$$
$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} = \frac{a}{(a+b)^4}$$

Sada imamo:

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

Luka Rimanić (2), Rijeka

2934. *Jedna škola ima a učenika prvog, b učenika drugog i c učenika trećeg razreda. Slučajno su izabrana dva učenika i ustanovljeno je da jedan od njih ide u viši razred od drugog izabranog učenika. Kolika je vjerojatnost da taj učenik ide u treći razred?*

Rješenje. Primijetimo da je: ab – broj parova ako su izabrani učenik 1. i učenik 2. razreda, bc – broj parova ako su izabrani učenik 2. i učenik 3. razreda, ac – broj parova ako su izabrani učenik 1. i učenik 3. razreda.

$M = ac + bc$ – parovi koji sadrže c,

$N = ab + ac + bc$ – ukupan broj parova,

$$P = \frac{M}{N} = \frac{ac + bc}{ab + ac + bc}.$$

Mirko Čorić (3), Šibenik

2935. *Nađi sva cjelobrojna rješenja diofantske jednadžbe*

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8.$$

Rješenje. Ako je $x=0$ onda je $-y^3=8$ i $y=-2$. Ako je $y=0$ onda je $x^3=8$ i $x=2$.

Pretpostavimo da je $xy\neq 0$. Moramo promatrati tri slučaja:

1° $x>0,\ y<0$:

$$x^3=y^3+2xy+8 \quad \text{i} \quad x^3<2^3,$$

odakle je $x=1$. Sada je $y^3+2y+7=0$, a ova jednadžba nema cjelobrojno rješenje.

2° $x<0,\ y>0$:

$$y^3-x^3=-2xy-8<-2xy,$$

ali $y^3-x^3=y^3+(-x)^3\geqslant y^2+(-x)^2\geqslant -2xy$, što nije moguće.

3° $xy>0$:

Sada je

$$x^3-y^3=2xy+8>0.$$

Nadalje $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)>0$, pa je $x-y>0$.

Postoje dvije mogućnosti.

a) Za $x-y=1$ je

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=2xy+8,$$

odakle je

$$(x-y)((x-y)^2+3xy)=2xy+8$$

tj.

$$(1+3(y+1)y)=2(y+1)y+8$$

i

$$y^2+y-7=0,$$

što nema cjelobrojno rješenje.

b) Za $x-y\geqslant 2$ iz $x^3-y^3=2xy+8$ slijedi

$$2xy+8=(x-y)(x^2+xy+y^2)\geqslant 2\cdot 3xy,$$

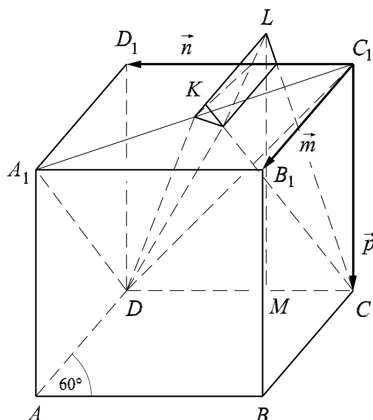
tj. $xy\leqslant 2$, ali $y\geqslant 1,\ x\geqslant 3 \implies xy\geqslant 3$ i $x\leqslant -1,\ y\leqslant -3 \implies xy\geqslant 3$.

Dakle, jedina cjelobrojna rješenja su $(0,-2)$ i $(2,0)$.

Luka Rimanić (2), Rijeka

2936. *Baza uspravne prizme $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je romb $ABCD$ s kutom uz vrh A jednakim 60°. Svi bridovi imaju duljinu a. Točka K je ortogonalna projekcija točke B_1 na ravninu DA_1C_1, a točka L je ortogonalna projekcija točke K na ravninu DD_1C_1. Odredi volumen piramide $DCKL$.*

Rješenje. Uzmimo da je baza piramide $DCLK$ trokut CDL, koji leži u ravnini DD_1C_1.



Tada je dužina $\overline{KL}$ visina te piramide jer je $KL\perp DD_1C_1$. Volumen piramide je

$$V=\frac{1}{3}P_{CDL}\cdot|KL|=\frac{1}{6}|CD|\cdot|LM|\cdot|KL|,$$

gdje je točka M ortogonalna projekcija točke L na pravac DC. Nađimo duljine dužina $\overline{CD}$, $\overline{LM}$ i $\overline{KL}$ pomoću vektora.

Uzmimo za bazu vektora u prostoru, vektore $\vec{m}=\overrightarrow{C_1B_1}$, $\vec{n}=\overrightarrow{C_1D_1}$ i $\vec{p}=\overrightarrow{C_1C}$. Napravimo "tablicu skalarnog množenja" vektora te baze:

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
$\vec{n}$	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
$\vec{p}$	0	0	a^2

Sada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1K}&=\overrightarrow{C_1K}-\overrightarrow{C_1B_1}\\&=x\cdot\overrightarrow{C_1A_1}+y\cdot\overrightarrow{C_1D}-\overrightarrow{C_1B_1}\\&=x(\vec{m}+\vec{n})+y(\vec{n}+\vec{p})-\vec{m}\\&=(x-1)\vec{m}+(x+y)\vec{n}+y\vec{p}.\end{aligned}$$

Kako je $B_1K\perp C_1A_1$ i $B_1K\perp C_1D$, onda je

$$\overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec{m}+\vec{n})=0,$$

$$\overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec{n}+\vec{p})=0.$$

Iz prikaza vektora $\overrightarrow{B_1K}$ u bazi $\{\vec{m},\vec{n},\vec{p}\}$ i "tablice množenja vektora baze" dobivamo ovaj

sistem linearnih jednadžbi

$$2x + y = 1,$$
$$3x + 4y = 1.$$

Odavde je $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$, pa je

$$\overrightarrow{C_1K} = \frac{3}{5}(\vec{m}+\vec{n}) - \frac{1}{5}(\vec{n}+\vec{p}) = \frac{1}{5}(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p}).$$

Analogno je

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{C_1L} - \overrightarrow{C_1K} = z \cdot \overrightarrow{C_1D_1} + t \cdot \overrightarrow{C_1C} - \overrightarrow{C_1K}$$
$$= \frac{1}{5}(-3\vec{m} + (5z-2)\vec{n} + (5t+1)\vec{p}).$$

Iz uvjeta $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{KL} \cdot \vec{p} = 0$ dobivamo $z = \frac{7}{10}$ i $t = -\frac{1}{5}$. Prema tome, $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{10}(-2\vec{m} + \vec{n})$ i

$$|KL| = \frac{3}{10}\sqrt{(-2\vec{m}+\vec{n})^2}$$
$$= \frac{3}{10}\sqrt{4\vec{m}^2 - 4\vec{m}\cdot\vec{n} + \vec{n}^2}$$
$$= \frac{3}{10}\sqrt{4a^2 - 4\cdot\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Konačno je

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CL} = u\overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{C_1L} - \overrightarrow{C_1C})$$
$$= u\vec{n} - z\vec{n} - t\vec{p} + \vec{p} = \left(u - \frac{7}{10}\right)\vec{n} + \frac{6}{5}\vec{p}.$$

Kako je $\overrightarrow{LM} \cdot \vec{n} = 0$, onda je $u = \frac{7}{10}$ i $\overrightarrow{LM} = \frac{6}{5}\vec{p}$, odakle je $|LM| = \frac{6}{5}a$. Traženi volumen je

$$V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{6a}{5} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{10} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}.$$

Luka Žunić (2),
Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 226. *Ozren želi proučiti kako neke osobe mogu ležati na dasci s čavlima. Pretpostavio je da je težina jednoliko raspodijeljena na sve čavle na kojima osoba leži. Promjer vrha čavla je 2 mm i postavljeno je 20 čavala po dm^2. Ako na čavlima leži osoba mase 75 kg i površina stražnjeg dijela tijela na kojem leži iznosi 0.64 m^2 koliki su prosječni tlak i sila na svaki čavao?*

Rješenje.

$2r = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$

$1 \text{ dm}^2 \rightarrow 20$ čavala

$m = 75$ kg

$\underline{S = 0.64 \text{ m}^2}$

$p_1 = ?$

$F_1 = ?$

$1 \text{ m}^2 \rightarrow 2000$ čavala

$$N_S = 0.64 \text{ m}^2 \cdot 2000\frac{\text{čavala}}{\text{m}^2} = 1280 \text{ čavala},$$
$$S_{1\ \text{čavla}} = r^2\pi = (0.001 \text{ m})^2\pi$$
$$= 0.00000314 \text{ m}^2,$$
$$S_n = 1280 \cdot 0.00000314 \text{ m}^2 = 0.004 \text{ m}^2,$$
$$p_n = \frac{G}{S_n} = \frac{750 \text{ N}}{0.004 \text{ m}^2} = 187\,500 \text{ Pa},$$
$$p_1 = \frac{p_n}{n} = \frac{187\,500 \text{ Pa}}{1280} = 146.5 \text{ Pa},$$
$$F_1 = \frac{G}{n} = \frac{750 \text{ N}}{1280} = 0.59 \text{ N}.$$

Ivan Poparić-Grgas (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 227. *Vesna stoji ispred desetmetarske skakaonice. Koliki rad treba obaviti da bi se popela na vrh skakaonice? Kolika je njena potencijalna gravitacijska energija u odnosu na površinu vode? Opiši što se dogodi s tom energijom kad Vesna skoči u vodu. Njezina masa je 50 kg.*

Rješenje.

$m = 50$ kg

$h = 10$ m

$$G = mg = 50 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 500 \text{ N}$$

$$W = Gh = 500 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 5000 \text{ J}$$

Vesna treba obaviti rad od 5000 J.

$E_p = mgh = 50 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 10 \text{ m} = 5000 \text{ J}.$

Njena potencijalna energija je 5000 J.

Kad Vesna skoči u vodu njena potencijalna energija se pretvori u kinetičku energiju, a kad udari o vodu kinetička energija prelazi u unutarnju energiju Vesnina tijela i vode tj. nastalih valova.

Silvija Konjić (7),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 228. *Profesor Mudrić istražuje kako šišmiši izbjegavaju prepreke. Šišmiši odašilju zvučni puls koji putuje brzinom 330 m/s kroz zrak i detektiraju zvuk kad se odbije od prepreke. U jednom mjerenju profesor Mudrić je izmjerio da je šišmiš letio ravno prema zidu brzinom 6 m/s i poslao zvučni puls kad se nalazio 3 m ispred zida. Koliko vremena je šišmiš imao da promijeni smjer leta da bi izbjegao zid?*

Rješenje.

$d = 3$ m

$v_1 = 6$ m/s

$v_2 = 330$ m/s – brzina zvuka kojeg odašilje šišmiš,

$t = ?$ – vrijeme koje je šišmiš imao da izbjegne prepreku,

$$v_1 = \frac{s}{t_1},$$

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{3 \text{ m}}{6 \text{ m/s}} = 0.5 \text{ s},$$

to je vrijeme za koje bi šišmiš udario u prepreku.

$$2d = v_2 t_2,$$

$$2 \cdot 3 \text{ m} = 330 \text{ m/s} \cdot t_2,$$

$$t_2 = 0.018 \text{ s},$$

je vrijeme za koje se vratio zvuk kojeg je odaslao šišmiš prema prepreci.

$t = t_2 - t_1 = 0.5 \text{ s} - 0.018 \text{ s} = 0.482 \text{ s} \approx 0.48 \text{ s}.$

Šišmiš je imao 0.48 s da izbjegne prepreku.

Ivana Vukičević (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 229. *Marina vozi čamac i promatra valove. Procijenila je da je razmak između dva susjedna brijega vala 2 m. Ako se vozi ususret valovima, oni udaraju u čamac 2 puta u sekundi, no čamac ide naprijed. Ako čamac okrene suprotno tako da ga valovi nose, valovi udaraju o krmu jedanput u sekundi. Kolike su brzine čamca i valova?*

Rješenje.

$\lambda = 2$ m

$f_1 = 2$ Hz

$f_2 = 1$ Hz

$v_č = ?$

$v_v = ?$

$$v_1 = \lambda f_1 = 4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \lambda f_2 = 2 \text{ m/s}.$$

Brzina valova u odnosu na čamac je jednaka zbroju brzina čamca i valova u slučaju kad čamac ide ususret valovima. Kad čamac "bježi" valovima brzina valova u odnosu na čamac je jednaka razlici brzina čamca i valova.

$$v_1 = v_č + v_v = 4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = v_č - v_v = 2 \text{ m/s}.$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobiva se:

$$2v_č = 6 \text{ m/s} \quad \text{tj.} \quad v_č = 3 \text{ m/s}.$$

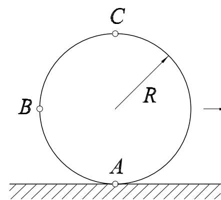
Uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobiva se

$$v_v = 1 \text{ m/s}.$$

Brzina čamca je 3 m/s, a valova 1 m/s.

Ur.

1301. *Okrećući pedale kutnom brzinom $\omega_1 = 4$ rad/s fizičar se vozi na biciklu čiji prednji zupčanik ima polumjer $r_1 = 10$ cm, a zadnji $r_2 = 4$ cm. Ako je polumjer zadnjeg kotača $R = 30$ cm, kolike su brzine točaka A, B i C (slika) u sistemu S_1 vezanom za bicikl, a kolike u sistemu S_2 vezanom za nepokrenutu podlogu. Na slici je brzina bicikla usmjerena na desno.*



Rješenje.

$$\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$$
$$r_1 = 10 \text{ cm}$$
$$r_2 = 4 \text{ cm}$$
$$\underline{R = 30 \text{ cm}}$$
$$v_A,\ v_B,\ v_C = ?$$

Kad je sistem S_1 vezan za bicikl, centar vrtnje (odnosno bicikl) se giba brzinom jednakom tangencijalnoj brzini bilo koje točke na kružnici. Budući da su zupčanici povezani, $v_1 = v_2$, odakle je

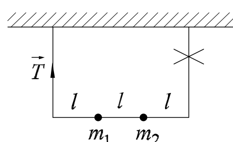
$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \implies \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = 10 \text{ rad/s}.$$

Isto tako, i $\omega_2 = \omega_k$ (kutna brzina kotača), pa je brzina kotača $v_k = \omega_k \cdot R = 3$ m/s. Vektor tangencijalne brzine u točki A suprotan je vektoru brzine bicikla, a jednaki su po iznosu, pa je $v_A = 0$. Brzina točke B zbroj je brzine bicikla i tangencijalne brzine u točki B, koje su okomite i jednake po iznosu, tj. $v_B = v_k\sqrt{2} = 4.2$ m/s. Brzina točke C zbroj je istih jednakih brzina, ali sada s kolinearnim vektorima istog smjera: $v_C = 2v_k = 6$ m/s.

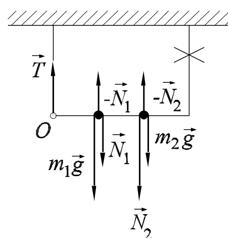
Kada je sistem vezan za nepokretnu podlogu, sve se točke gibaju tangencijalnom brzinom $v_k = 3$ m/s.

Mislav Cvitković (3),
Franjevačka klasična gimnazija, Sinj

1302. *Horizontalno postavljenu šipku duljine $3l$ pridržavaju dvije niti. Na šipku su pričvršćena dva utega masa m_1 i m_2. Utezi se nalaze na jednakim udaljenostima jedan od drugog i od krajeva šipke (vidi sliku). Sistem se nalazi u ravnotežnom položaju, a mase šipke i niti su zanemarive. Nađi jakost sile zatezanja cijele niti T u trenutku kada prekinemo desnu nit.*



Rješenje. U trenutku prekidanja desne niti na šipku djeluju sila zatezanja $\vec{T}$ i reakcije $-\vec{N}_1$ i $-\vec{N}_2$, a na utege njihove težine i sile $\vec{N}_1$ i $\vec{N}_2$.



Pošto je masa šipke zanemariva, vrijedi $0 = T + N_1 + N_2$ i $0 = lN_1 + 2lN_2$ (moment sile računat u odnosu na točku O). Odavde je $N_1 = -2N_2$ i $T = N_2$. Za ubrzavanje prvog i drugog tijela $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ u trenutku prekidanja niti vrijedi $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$, jer je šipka kruta, a točka O nepokretna. Iz jednadžbe gibanja za prvi uteg

$$m_1 a_1 = m_1 g + N_1$$

slijedi

$$a_1 = g - \frac{2N_2}{m_1},$$
$$m_2 a_2 = 2m_2 a_1 = 2m_2\left(g - 2\frac{N_2}{m_1}\right)$$

pa koristeći jednadžbu gibanja za drugi uteg

$$m_2 a_2 = m_2 g + N_2,$$

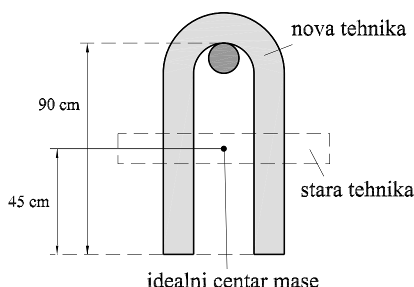
dobijemo

$$2m_2\left(g - 2\frac{N_2}{m_1}\right) = m_2 g + N_2,$$
$$N_2 = T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + 4m_2}.$$

Ur.

1303. *Na sportskim natjecanjima se posljednjih tridesetak godina koristi nova tehnika skoka u vis koja se sastoji u tome da skakač preskače letvicu s leđne strane prebacujući preko letvice postepeno dio po dio tijela. Na usporenom snimku skoka vidi se da prvo preko letvice prelaze skakačeve ruke, glava, zatim drugi dio, a potom i ostatak tijela. Objasnite zašto se novom tehnikom mogu preskočiti veće visine nego starom, u kojoj se preko letvice prebacuje odjednom cijelo tijelo. Ako skakač visine $l = 180$ cm preskače starom tehnikom $h = 175$ cm, koliku visinu bi preskočio novom tehnikom? Pretpostavi da je skakačevo tijelo idealno savitljivo i homogeno.*

Rješenje.

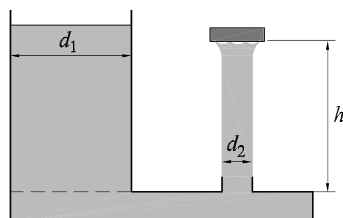


Kod stare tehnike preskakanja skakačevo tijelo je bilo postavljeno tako da je centar njegove mase bio u samom tijelu, pa je zato morao biti iznad letvice koju preskače. U novoj tehnici skakač pri skoku postavlja tijelo tako da centar mase bude u "šupljini" koju stvori savijanjem tijela, tako da centar mase bude ispod letvice koju preskače, da tako može više preskočiti. Budući da je tijelo homogeno i idealno savitljivo, centar mase, kada se savije, nalazi se nasred "šupljine", i stoga je za $\frac{1}{4}$ skakačeve visine udaljen od vrha letvice, za razliku od stare tehnike, gdje je bio iznad letvice. Dakle, visina koju bi skakač preskočio novom tehnikom je

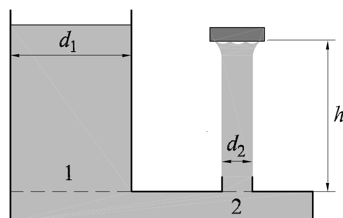
$$\begin{aligned} h_{\text{nova}} &= h_{\text{stara}} + \frac{1}{4}h_{\text{skakača}} \\ &= 1.75 \text{ m} + \frac{1.8 \text{ m}}{4} = 2.2 \text{ m}. \end{aligned}$$

Mislav Cvitković (3), Sinj

1304. *Na slici je shematski prikazana fontana. Polumjer cisterne iz koje se dovodi voda u cijev fontane je $r_1 = 1$ m, a polumjer izlaznog otvora fontane $r_2 = 5$ mm. Voda iz fontane izlazi brzinom $v = 5$ m/s. Odredi za koliko se razlikuju tlak na dno cijevi fontane (presjek na slici) i atmosferski tlak. Na koju visinu h, u odnosu na početak mlaza (vidi sliku), treba postaviti disk mase $m = 50$ g da bi on mirovao na mlazu vode, ako je promjer diska veći od 1 cm? Kontrakciju mlaza zanemariti i smatrati da brzina vode neposredno poslije sudara s površinom diska ima samo horizontalnu komponentu. Pretpostaviti da je voda nestlačiva tekućina zanemarive viskoznosti.*



Rješenje.



Bernoullijeva jednadžba primijenjena na presjeke 1 i 2, koji su na istoj visini, glasi

$$\rho\frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho\frac{v_2^2}{2} + p_a.$$

Kako je $S_1 \gg S_2$, brzina v_1 može se zanemariti u odnosu na brzinu $v_2 = v$, pa je razlika tlakova

$$p_1 - p_a = \rho\frac{v^2}{2} = 12.5 \text{ kPa}.$$

Da bi disk mirovao na nekoj visini h treba biti ispunjeno $mg = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, gdje je Δp promjena impulsa vode koja za Δt udari o površinu diska.

Pošto brzina vode poslije sudara s površinom diska ima samo horizontalnu komponentu, imamo

$$\Delta p = \Delta m\overline{v} = \pi\rho\frac{d_2^2}{4}\overline{v}^2\Delta t,$$

gdje je $\overline{v}^2 = v^2 - 2gh$. Iz $mg = \pi\rho\frac{d_2^2}{4}(v^2 - 2gh)$ dobije se

$$h = \frac{1}{2g}\left(v^2 - \frac{4mg}{\pi\rho d_2^2}\right) = 0.96 \text{ m}.$$

Ur.

1305. *U akceleratoru nastaje uzak snop protona čije energije su $E = 2$ keV. Protoni se gibaju prema nepokretnoj metalnoj sferi polumjera r koja se nalazi na velikoj udaljenosti od akceleratora. Udaljenost između centra*

sfere i početnog pravca protonskog snopa je $d = \frac{r}{2}$. Nađi potencijal sfere ako akcelerator radi dovoljno dugo. Međudjelovanje protona je zanemarivo.

Rješenje. Protoni koji se sudaraju s metalnom sferom predaju svoj naboj sferi, tj. sfera postaje pozitivno nabijena. Međudjelovanje između protonskog snopa i nabijene sfere modificira putanju snopa, tako da se u jednom trenutku protoni prestaju sudarati sa sferom. Oni prolaze u neposrednoj blizini sfere. Protoni su nerelativistički pa iz zakona održanja energije slijedi

$$E = eV + \frac{1}{2}mv^2,$$

gdje je m masa, e naboj, a v brzina protona. Zakon održanja momenta impulsa glasi

$$mv_0 d = mvr,$$

gdje je v_0 početna brzina protona. Dalje je

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{d}{r}\right)^2 E.$$

Dakle, konačni potencijal sfere je:

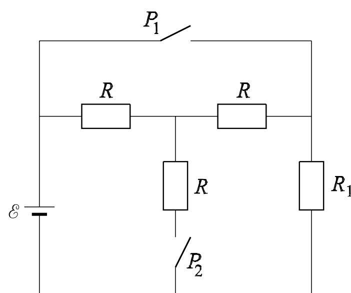
$$V = \left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right)\frac{E}{e}.$$

Zamjenom brojnih vrijednosti dobije se

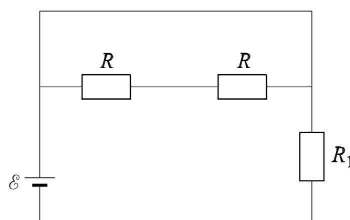
$$V = 1500 \text{ V}.$$

Ur.

1306. *U električnom krugu na slici odredi takvu vrijednost otpora R_1 da kod zatvorenog prekidača P_1 i otvorenog P_2, u grani s izvorom elektromotorne sile E bude ista jakost električne struje kao i pri otvorenom prekidaču P_1 i zatvorenom P_2. Kolika je jakost te struje? $E = 12$ V, $R = 10\ \Omega$.*

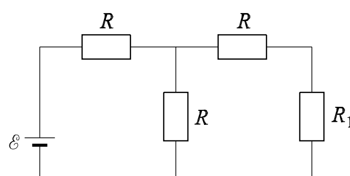


Rješenje. U prvom slučaju (P_1 zatvoren i P_2 otvoren) strujni krug pojednostavljeno izgleda ovako:



$$R_{UK} = R_1 + 2R.$$

U drugom slučaju (P_1 otvoren i P_2 zatvoren) izgleda ovako:



$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + R_1} \implies$$

$$R_2 = \frac{R(R + R_1)}{2R + R_1} \implies$$

$$R_{UK} = R + R_2 = \frac{3R^2 + 2RR_1}{2R + R_1}.$$

Kako su u oba kruga i napon i jakost jednaki, i otpori, zbog Ohmova zakona, moraju biti jednaki, pa je

$$R_1 + 2R = \frac{3R^2 + 2RR_1}{2R + R_1},$$

$$R_1^2 + 2RR_1 + R^2 = 0,$$

$$R_1^2 + 20R_1 + 100 = 0,$$

$$R_1 = -10\ \Omega.$$

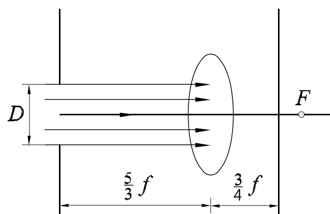
Jakost struje I po Ohmovu zakonu je

$$I = \frac{U}{R_{UK}} = \frac{U}{R_1 + 2R} = \frac{U}{\dfrac{3R^2 + 2RR_1}{2R + R_1}} = 1.2 \text{ A}.$$

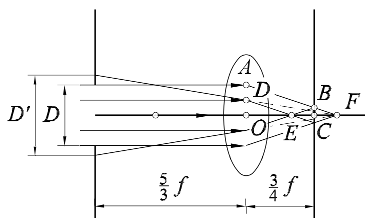
Mislav Cvitković (3), Sinj

1307. *Lijevo od leće žarišne duljine f na udaljenosti $5f/3$ nalazi se zaslon koji ima*

kružni otvor promjera $D = 1.5$ cm. Desno od leće na udaljenosti $3f/4$ od nje smješteno je ravno ogledalo. Kroz otvor na zastoru pada na leću paralelan snop svjetlosti. Odredi polumjer svijetlog kruga koji se pojavljuje na zaslonu kao posljedica prolaska svjetlosti kroz leću i odbijanja od ogledala.



Rješenje.



Bez zrcala zrake svjetlosti bi se skupljale u žarištu leće, tj. u točki F. Zrcalo odbija zrake tako da će se one skupljati u točki E koja se nalazi na istoj udaljenosti od zrcala kao i točka F, ali sa suprotne strane, tj. između leće i zrcala. Ova točka se ponaša kao izvor svjetlosti, tj. kao predmet za stvaranje na zastoru svjetlosnog kruga. Pošto se taj predmet nalazi između leće i žarišta $p = \frac{F}{2}$, to je slika imaginarna i dobije se u produžetku presjeka zraka svjetlosti koje su prošle kroz leću. Iz jednadžbe leće se dobije

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{l} = \frac{1}{F} \implies l = F.$$

Dakle, slika je u žarištu. Iz sličnosti trokuta AOF i BCF dobije se da je $|BC| = \frac{1}{8}D$. Iz sličnosti trokuta DOE i BCE slijedi $|OD| = \frac{1}{4}D$. Konačno se dobije

$$D' = \frac{4}{3}D = 2 \text{ cm}.$$

Ur.

Rješenja zabavne matematike

Broj 2005

Točna jednakost glasi: $12 + 34 \cdot 56 + 89 = 2005$.

Mala kombinacija

Vidite crteže!

M	A	C	A
O	B	R	T
B	E	T	I
A	R	A	K

5	0	8	0
6	2	4	1
2	7	1	3
0	4	0	9

Duhački kvartet

Najprije se zaključuje da Josip ne može sjediti nasuprot Ignaca (zbog 1)), niti desno od njega (zbog 3) i 2)). Josip je, dakle, lijevo od Ignaca, pa je on klarinetist. Desno od Ignaca sjedi Filip (zbog 4)) itd. Poredak glazbenika za stolom: Ignac (oboist), Josip (klarinetist), Lovro (fagotist), Filip (flautist).

Zbrajaljka

Ima 9 rješenja. Ta rješenja daju zamjene EIRSŠT= 234816, 283716, 284916, 387516, 692518, 693718, 745018, 746218, 796318.

Čutura i Vodopija

Postupak raspolavljanja vina izgleda ovako: 14, 0, 0 – 8, 6, 0 – 8, 0, 6 – 2, 6, 6 – 2, 1, 11 – 13, 1, 0 – 13, 0, 1 – 7, 6, 1 – 7, 0, 7.



8. mediteransko matematičko natjecanje – memorijal Petera O'Hallorana

Mediteransko matematičko natjecanje je međunarodno natjecanje koje se održava od 1998. godine. Mogu sudjelovati države s Mediterana i one koje s njima neposredno graniče, a svaka država ga organizira zasebno za svoje učenike. Kako su zadaci olimpijskog tipa, pozivamo one učenike koji su godinu dana ranije na Državnom natjecanju postigli najbolje rezultate. Ove godine bilo je pozvano 17 učenika, koji su osvojili prvu ili drugu nagradu, od kojih se odazvalo njih 13: *Katja Trinajstić* i *Luka Žunić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka; *Toni Baržić*, Srednja škola "Vrbovec", Vrbovec; *Mate Šunjić*, Gimnazija "Metković", Metković; *Antonio Krnjak*, Gimnazija "Čakovec", Čakovec; *Mihej Komar* i *Davor Prugovečki*, XV. gimnazija, Zagreb; *Nikola Adžaga*, *Goran Dražić*, *Marko Popović*, *Nikola Grubišić*, *Rudi Mrazović* i *Kristina Škreb*, V. gimnazija, Zagreb.



Natjecatelji su rješavali zadatke, u trajanju od 4.5 sata, 16. travnja na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. U nedjelju, 17. travnja svečano su proglašeni rezultati i podijeljene nagrade najuspješnim natjecateljima. Prvu nagradu dobio je *Rudi Mrazović*, drugu *Goran Dražić* i *Katja Trinajstić*, a treću *Kristina Škreb* i *Toni Baržić* dok su *Davor Prugovečki* i *Marko Popović* dobili pohvalu.

Ove godine na Mediteranskom matematičkom natjecanju sudjelovali su učenici iz Austrije, Bosne i Hercegovine, Grčke, Hrvatske, Slovenije, Španjolske i Turske.

1. Profesor je rekao Petru produkt dvaju prirodnih brojeva, a Slavku zbroj tih dvaju brojeva. Nijedan od njih na početku nije znao broj koji je bio poznat drugom dječaku.

Jedan od dječaka rekao je drugome: *Nema načina da odrediš moj broj.*

Na to drugi dječak odgovori: *Varaš se, tvoj broj je 136.*

Koji je broj rekao profesor svakom dječaku? Obrazložite odgovor!

2. Neka su k i k' dvije koncentrične kružnice sa središtem u točki O, te odgovarajućim polumjerima R i R' $(R < R')$. Zraka Ox siječe k u točki A. Nasuprotna zraka Ox' siječe k' u točki B. Treća zraka Ot (različita od prethodne dvije) siječe k u E i k' u F.

Dokažite da kružnice (OAE), (OBF), kružnica s promjerom $\overline{EF}$ i kružnica s promjerom $\overline{AB}$ prolaze istom točkom.

3. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 3)$ konačni skupovi prirodnih brojeva. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A_i| + \frac{1}{\binom{n}{3}}\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i \cap A_j \cap A_k| \geq \frac{2}{\binom{n}{2}}\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i \cap A_j|,$$

pri čemu je $|E|$ oznaka za broj elemenata skupa E.

4. Neka je A skup polinoma stupnja 3 s vodećim koeficijentom 1 koji imaju sljedeće svojstvo: za svaki polinom $f(x)$ iz A postoje pozitivan prost broj p koji ne dijeli 2004 i prirodan broj q koji je relativno prost s p i s 2004, takvi da je $f(p) = 2004$ i $f(q) = 0$.

Dokažite da postoji beskonačni podskup $B \subseteq A$ takav da su grafovi svih polinoma iz B identični do na translaciju.

Željko Hanjš, Zagreb

⋆ ⋆ ⋆

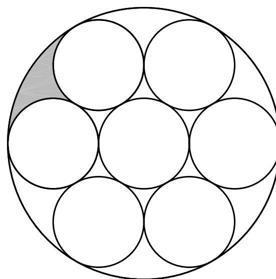
14. državni susret i natjecanje mladih matematičara Republike Hrvatske

Početkom svake godine u Republici Hrvatskoj kreću natjecanja učenika osnovnih i srednjih škola, a završavaju sredinom ljeta. Ovogodišnji ciklus susreta i natjecanja mladih matematičara započeo je školskim natjecanjima koja su se provodila tijekom siječnja i veljače. Na njima uvijek sudjeluje velik broj učenika. Najbolji učenici na školskim natjecanjima pozivaju se na općinska i gradska natjecanja. Ove godine ta su natjecanja održana 7. ožujka u svih 20 županija i Gradu Zagrebu. Kriteriji za održavanje tih natjecanja su jedinstveni za cijelu zemlju i postavlja ih Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Ono priprema i zadatke za ta natjecanja. Pogledajmo te zadatke:

Zadaci s općinsko-gradskog natjecanja

I. razred

1. Sedam kružnica jednakih polumjera smješteno je unutar veće kružnice kao na slici. Ako je polumjer manje kružnice 1, kolika je površina označenog dijela?



2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $n^5 - n$ djeljiv s 30.

3. Dokažite da je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ za svaki realan broj x.

4. U kvadratu površine P nalazi se 2005 figura čiji je zbroj površina veći od $2004P$. Dokažite da postoji barem jedna točka zajednička svim figurama.

II. razred

1. Dani su kompleksni brojevi $z = \dfrac{2t - i}{t + i}$ za $t \in \mathbf{R}$.

a) Koje sve vrijednosti može poprimiti $|z|$?

b) Odredite skup parametara t za koje vrijedi

$$|3\,\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z| < 3.$$

2. Nađite sve realne brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(x^2 + y^2 - 4)^2(xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0.$$

3. U jednakokračnom trokutu jedan kut iznosi 108°. Dokažite da je omjer duljinâ osnovice i kraka tog trokuta jednak $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Nađite koeficijente a i b takve da polinom ax^5+bx^4+1 bude djeljiv s x^2-x-1.

III. razred

1. Ako je $\log_a b = 10$, izračunajte $\frac{\log_a x \cdot \log_x \frac{b}{a}}{\log_x b \cdot \log_{ab} x}$.

2. Za koje vrijednosti parametra α je nejednakost

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cdot \cos x \geq 0$$

zadovoljena za sve realne brojeve x?

3. U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle ABC = 75^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. Ako je P točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BP| = 2|PC|$, izračunajte kut $\sphericalangle APB$.

4. U raznostraničnom trokutu ABC povučene su težišnica $\overline{CT}$ i visina $\overline{CH}$ na stranicu $\overline{AB}$ (točke T i H leže na stranici $\overline{AB}$). Ako su kutovi $\sphericalangle ACT$ i $\sphericalangle HCB$ jednaki, dokažite da je trokut pravokutan.

IV. razred

1. Na elipsi sa središtem O nalaze se točke A i B takve da je $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. Dokažite da udaljenost točke O od pravca AB ovisi samo o duljinama poluosi elipse.

2. Ako su u trokutu duljine stranica a, b, c tri uzastopna člana aritmetičkog niza (u tom poretku), dokažite da za njegove kutove (α je kut nasuprot stranice a, γ nasuprot stranice c) vrijedi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}.$$

3. Zadan je rastav skupa prirodnih brojeva:

$$\mathbf{N} = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \cup \{11, 12, 13, 14, 15\} \cup \ldots$$

Ako je S_k zbroj svih k brojeva u k-tom skupu iz gornjeg rastava, dokažite da vrijedi

$$S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2n-1} = n^4$$

za svaki prirodni broj n.

4. Na krivulji s jednadžbom $y = x^4 - 2x^2$ nalaze se 4 različite točke $T_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Ako točke T_1, T_2, T_3, T_4 leže na jednom pravcu, dokažite da je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

⋆ ⋆ ⋆

Nakon održanih općinskih i gradskih natjecanja županijska povjerenstva za matematiku pregledala su pristigla izvješća općinskih povjerenstava i učenike s najboljim rezultatima pozvala na 10. županijsko natjecanje. Županijski susreti i natjecanja iz matematike održani su 8. travnja također po jedinstvenim kriterijima za cijelu Republiku Hrvatsku. Na županijskim natjecanjima sudjeluje svake godine oko 1000 učenika srednjih škola. Tako je bilo i ovaj put. Program susreta i natjecanja obuhvaćao je rješavanje problemskih zadataka koje je također izradilo Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Evo tih zadataka:

I. razred

1. Odredite sve trojke realnih brojeva x, y, z za koje vrijedi

$$4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1.$$

2. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ odabrane su redom točke E i F takve da je $EF \parallel BD$. Dokažite da trokuti BCE i CDF imaju jednake površine.

3. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1,$$

dokažite nejednakost

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

4. Dokažite da je

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}.$$

II. razred

1. Trokutu ABC upisana je kružnica polumjera r sa središtem u točki S. Pravac kroz točku S siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D i E. Dokažite da za površinu P trokuta CED vrijedi $P \geq 2r^2$. Kada vrijedi jednakost?

2. Nađite sve parove cijelih brojeva a i b za koje vrijedi

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

3. Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(5) = 2005$. Može li broj $P(2005)$ biti potpun kvadrat (kvadrat prirodnog broja)?

4. Dano je 99 (ne nužno različitih) prirodnih brojeva manjih od 100. Ako zbroj nikoja dva, tri ili više od tih brojeva nije djeljiv sa 100, dokažite da su svi oni međusobno jednaki.

III. razred

1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je broj

$$2^4 + 2^7 + 2^n$$

potpun kvadrat.

2. U trokutu s kutovima α, β i γ vrijedi jednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma.$$

Ako je poznato da su kutovi α i β šiljasti, dokažite da je kut γ pravi.

3. Neka je T točka unutar trostrane piramide $ABCD$ i neka su točke A_1, B_1, C_1, D_1 presjecišta pravaca AT, BT, CT, DT s nasuprotnim stranama piramide, redom. Ako je

$$\frac{|AT|}{|TA_1|} = \frac{|BT|}{|TB_1|} = \frac{|CT|}{|TC_1|} = \frac{|DT|}{|TD_1|} = \lambda,$$

koje sve vrijednosti može λ poprimiti? Obrazložite odgovor!

4. Trokut ABC je šiljastokutan. Za bilo koju točku T iz unutrašnjosti ili s ruba trokuta ABC, točke T_a, T_b, T_c su redom nožišta okomica iz T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Ako je

$$f(T) = \frac{|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|}{|TT_a| + |TT_b| + |TT_c|},$$

dokažite da $f(T)$ ne ovisi o izboru točke T ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

IV. razred

1. Pokažite da za sve $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ vrijedi

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right) < 1.$$

2. Neka je S točka na stranici $\overline{AB}$ danog šiljastokutnog trokuta ABC i neka su P i Q središta kružnica opisanih trokutima ASC i BSC. Odredite položaj točke S (na stranici $\overline{AB}$) tako da trokut PQS ima najmanju moguću površinu.

3. Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = \frac{4n-2}{n} a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

4. Prirodni brojevi a, b i c zadovoljavaju jednakost

$$c(ac+1)^2 = (5c+2b)(2c+b).$$

a) Ako je c neparan, dokažite da je on potpun kvadrat.

b) Može li c biti paran?

⋆ ⋆ ⋆

Nakon održanih županijskih natjecanja županijska povjerenstva dostavila su svoja izvješća Državnom povjerenstvu za matematička natjecanja koje je pregledalo sva pristigla izvješća i na 14. državni susret i natjecanje pozvalo 82 učenika osnovnih škola i 105 učenika srednjih škola. Brojevi srednjoškolaca po razredima: I. razred – 26, II. razred – 26, III. razred – 26 i IV. razred – 27.

⋆ ⋆ ⋆

Susret i natjecanje održani su u Omišlju na otoku Krku od srijede 4. do subote 7. svibnja 2005. godine pod pokroviteljstvom Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa i u organizaciji Zavoda za školstvo i Hrvatskog matematičkog društva. Domaćin susreta bila je Područna osnovna škola "Omišalj". Sudionici susreta bili su smješteni u hotelu Adriatic i u depadansama Primorka i Marina. Svečano otvaranje 14. susreta mladih matematičara Republike Hrvatske s pozdravnim govorima i lijepim prigodnim programom održano je u šporstskoj dvorani osnovne škole u srijedu 4. svibnja navečer.

Lijepo je bilo u Omišlju! Učenici, učitelji i ostali djelatnici područne osnovne škole Omišalj učinili su sve da sudionici susreta provedu u njihovoj sredini nekoliko ugodnih dana. Vrijeme nas nije iznevjerilo, a i more i divni krajolici još su uljepšali opći dojam. Iz programa navodimo nekoliko posebnih doživljaja: razgledavanje Omišlja, obilazak i razgledavanje znamenitosti otoka Krka, plovidba brodom, te posjet i razgledavanje

Vrbnika i nove osnovne škole u gradu Krku (povjerenstvo). Neki sudionici sigurno su po prvi puta posjetili i razgledali naš najveći otok.

Sudionici susreta svojim domaćinima odužili su se radno. Evo kratkog opisa tog dijela susreta:

1) Za nastavnike–mentore organiziran je tradicionalni dvodnevni seminar. Održano je sedam predavanja i tri metodičke radionice. Predavači i teme:

Vinko Bajrović, 47. općinsko/gradsko natjecanje iz matematike za učenike osnovnih i srednjih škola u Splitu 2005.; *Mea Bombardelli, Dijana Ilišević, Željka Milin Šipuš*, Osvrt na razredbeni postupak na PMF-MO; *Neven Elezović*, Simetrične nejednakosti i geometrijski identiteti; *Jelena Gusić*, Razlike funkcijskih vrijednosti primjena džepnog računala (metodička radionica); *Ilija Ilišević*, Primjena kompleksnih brojeva u geometriji mnogokuta; *Zdravko Kurnik*, Dirichletov princip; *Anđelko Marić*, Pravokutan trokut i tri kružnice; *Anđelko Marić*, Neki poučci o Simsonovom pravcu; *Nikol Radović, Renata Svedrec*, Džepno računalo u nastavi matematike u osnovnoj školi (metodička radionica); *Milan Šarić*, Matematika pomaže matematici.

Članci za seminar i pisani materijali za metodičke radionice objavljeni su u Biltenu seminara za nastavnike–mentore br. 14.

2) Glavni dio susreta bilo je 14. državno natjecanje mladih matematičara. Kao i uvijek, vrlo uzbudljivo. Matematičkim knjigama i drugim vrijednim predmetima nagrađeno je 25 učenika osnovnih škola i 22 učenika srednjih škola. Pohvaljeno je 16 osnovnoškolaca i 15 srednjoškolaca.

Sponzori nagrada: Hrvatska elektroprivreda, OTO i Texas Instruments, Hrvatsko matematičko društvo, Školska knjiga, Profil international d.o.o.

⋆ ⋆ ⋆

Nagrade i pohvale

I. razred

Melkior Ornik, XV. gimnazija, Zagreb; *Igor Boban*, III. gimnazija, Split; *Dijana Marinčić*, Gimnazija "Varaždin", Varaždin (I. nagrada); *Ivan Šandrk*, V. gimnazija, Zagreb; *Ivan Gavran*, V. gimnazija, Zagreb; *Ines Marušić*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Helena Schill*, Gimnazija "Varaždin", Varaždin; *Filip Lavriv*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Ivan Krijan*, Gimnazija "Varaždin", Varaždin; *Sara Muhvić*, III. gimnazija, Osijek; *Snježana Mijošević*, III. gimnazija, Osijek; *Jelena Gusić*, Gimnazija Dinka Šimunovića, Sinj; *Ana Maršić*, Gimnazija M. A. Reljkovića, Vinkovci (pohvala).

II. razred

Luka Žunić, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka; *Antonio Krnjak*, Gimnazija "Čakovec", Čakovec (I. nagrada); *Igor Čanadi*, XV. gimnazija, Zagreb; *Luka Rimanić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (II. nagrada); *Žaklina Bisaga*, III. gimnazija, Osijek (III. nagrada); *Petar Sirković*, V. gimnazija, Zagreb; *Ervin Duraković*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka; *Mate Puljiz*, III. gimnazija, Split (pohvala).

III. razred

Goran Dražić, V. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Josip Saratlija*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *Marko Popović*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Mirko Čorić*, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik; *Iva Kasum*, V. gimnazija, Zagreb; *Marko Erceg*, III. gimnazija, Split (pohvala).

IV. razred

Nikola Grubišić, V. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Kristina Škreb*, V. gimnazija, Zagreb; *Rudi Mrazović*, V. gimnazija, Zagreb; (II. nagrada); *Toni Baržić*, Srednja škola "Vrbovec", Vrbovec; *Katja Trinajstić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *Sanja Šain*, V. gimnazija, Zagreb; *Davor Prugovečki*, XV. gimnazija, Zagreb; *Antonio Majdandžić*, Gimnazija Frane Petrića, Zadar; *Anđelo Martinović*, Zadarska privatna gimnazija, Zadar (pohvala).

Zadaci s državnog natjecanja

I. razred

1. Odredite sve brojeve čiji je zapis u dekadskom sustavu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x, y i z nepoznate znamenke, koji su djeljivi sa 792.

2. Spojnice središta trokutu upisane kružnice i njegovih vrhova dijele ga na tri trokuta od kojih je jedan sličan polaznome. Odredite kutove polaznog trokuta.

3. Koju najveću vrijednost može poprimiti izraz

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n},$$

ako su k, m, n prirodni brojevi takvi da je $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$.

4. Duljine stranica trokuta su a, b i c, a R je duljina polumjera opisane mu kružnice. Odredite kutove trokuta ako vrijedi $R=\dfrac{a\sqrt{bc}}{b+c}$.

II. razred

1. Neka su a, b, c realni brojevi, $a\neq 0$. Ako je x_1 jedno rješenje jednadžbe

$$ax^2+bx+c=0$$

i x_2 jedno rješenje jednadžbe

$$-ax^2+bx+c=0,$$

dokažite da je tada jedno rješenje x_3 jednadžbe

$$\frac{a}{2}x^2+bx+c=0,$$

između x_1 i x_2, tj. $x_1\leq x_3\leq x_2$ ili $x_2\leq x_3\leq x_1$.

2. Središte U upisane kružnice trokuta ABC spojeno je dužinama s njegovim vrhovima. Neka su O_1, O_2 i O_3 središta kružnica opisanih trokutima BCU, CAU i ABU. Dokažite da kružnice opisane trokutima ABC i $O_1O_2O_3$ imaju zajedničko središte.

3. Ako su a, b i c realni brojevi veći od 1, dokažite da za svaki realni broj r vrijedi nejednakost

$$(\log_a bc)^r+(\log_b ca)^r+(\log_c ab)^r\geq 3\cdot 2^r.$$

4. Dokažite da u svakom skupu od 11 prirodnih brojeva postoji njih 6, čiji je zbroj djeljiv sa 6.

III. razred

1. Nađite sva rješenja k, l, $m \in \mathbf{N}$ jednadžbe:

$$k!\,l! = k! + l! + m!.$$

($n!$ označava umnožak prirodnih brojeva od 1 do n.)

2. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama M, N i R. Neka je S točka na manjem od dva luka $\overset{\frown}{MN}$ i t tangenta na taj luk s diralištem S. Tangenta t siječe $\overline{NC}$ i $\overline{MC}$ redom u točkama P i Q. Dokažite da se pravci AP, BQ, SR i MN sijeku u jednoj točki.

3. Odredite skup svih točaka triedra takvih da je zbroj njihovih udaljenosti od strana triedra jednak zadanom pozitivnom broju a.

4. Pravilni poligon s 2005 stranica ima vrhove obojane crvenom, bijelom i plavom bojom. "Dozvoljenim bojanjem" zovemo bojanje u kojem dva susjedna vrha, koja su obojana različitim bojama, obojimo trećom bojom.

a) Dokažite da postoji konačan niz "dozvoljenih bojanja" nakon kojeg su svi vrhovi poligona iste boje.

b) Je li ta boja jednoznačno određena početnim rasporedom boja vrhova?

IV. razred

1. Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je zadan rekurzivno s $a_1 = 1$,

$$a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + 1, \quad \text{za } n \geq 2.$$

Odredite najmanji realni broj M takav da je

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M \quad \text{za svaki} \quad m \in \mathbf{N}.$$

2. Neka je P polinom n-tog stupnja čiji su svi koeficijenti nenegativni, a vodeći i slobodni koeficijent jednaki su 1. Uz pretpostavku da su sve nultočke od P realni brojevi, dokažite da za svaki $x \geq 0$ vrijedi $P(x) \geq (x+1)^n$.

3. Dokažite da postoji točno jedan prirodni broj koji se u dekadskom sustavu zapisuje samo znamenkama 2 i 5, ima 2005 znamenaka i djeljiv je s 2^{2005}.

4. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut i neka su P i Q redom točke na njegovim stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ takve da je $\measuredangle BAP = \measuredangle DAQ$. Dokažite da trokuti ABP i ADQ imaju jednake površine ako i samo ako je spojnica njihovih ortocentara okomita na pravac AC.

⋆ ⋆ ⋆

Na državnom natjecanju izabrana je i ekipa Republike Hrvatske za Međunarodnu matematičku olimpijadu u Meridi (Meksiko). Putnici u Meksiko su: *Toni Baržić, Goran Dražić, Nikola Grubišić, Rudi Mrazović, Kristina Škreb* i *Katja Trinajstić.*

Svečano proglašenje najboljih natjecatelja i članova olimpijske ekipe obavljeno je u petak 6. svibnja navečer, a 14. državni susret je završen okruglim stolom u subotu prije podne.

Zdravko Kurnik, Zagreb

21. ljetna škola mladih fizičara: "Fizika u temeljima suvremene znanosti i društva", Labin, 19. – 25. lipnja 2005.

Tradicionalna ljetna škola mladih fizičara održana je ove godine po 21. put, a domaćin je bila Srednja škola Mate Blažine u Labinu. Tema škole bila je prilagođena Svjetskoj godini fizike koja je u tijeku. Tako su četiri predavanja bila posvećena podsjećanju na revolucionarne Einsteinove radove iz 1905. godine i njihov utjecaj na razvoj fizike do današnjih dana. Predavanja o fotoelektričnom efektu i Brownovu gibanju popraćena su odgovarajućim pokusima koje je vrhunski priredio profesor fizike u labinskoj srednjoj školi Željko Brenčić. Uz podsjećanje na Einsteina u Svjetskoj godini fizike odabrali smo predavanja koja su pokazala kako fizika utječe na razna područja znanosti i života. Tako smo imali prilike čuti kako fizika utječe na biokemiju, primjenu lasera u svakodnevnom životu, razvoj modernih tehnologija, filozofiju, vremenske prognoze, kriminalistiku, povijest umjetnosti, biofiziku i proučavanje tsunamija. Evo popisa svih predavanja:

Ivica Picek (PMF Zagreb): *Zašto je Svjetska godina fizike u znaku Einsteinovih otkrića?*; Predrag Prester (PMF Zagreb): *100 godina teorije relativnosti*; Dubravko Klabučar (PMF Zagreb): *Fotoelektrični efekt i Einsteinova fotonska hipoteza*; Željko Brenčić (ŠS Labin): *Pokusi s fotoelektričnim efektom*; Ivica Picek (PMF Zagreb): *Nobelova nagrada za fiziku 2004.*; Sanja Tomić (IRB Zagreb): *Otkrivanje tajni molekula*; Damir Aumiler (IF Zagreb): *Laseri u modernoj znanosti i tehnologiji*; Branko Grisogono (PMF Zagreb): *Kako znati o budućem vremenu i klimi*; Ivica Aviani (IF Zagreb): *Fizika kao temelj novih tehnologija*; Tihomir Vukelja (PMF Zagreb): *Moderna fizika kao filozofski problem*; Branimir Lukić (EPFL Lausanne): *Brownovo gibanje*; Željko Brenčić (ŠS Labin): *Pokusi s Brownovim gibanjem*; Milko Jakšić (IRB Zagreb): *Mali akceleratori u primjeni*; Janko Herak (FBF Zagreb): *Fizička organizacija lipoproteina*; Snježana Markušić (PMF Zagreb): *Tsunami – razorni morski val uzrokovan potresom.*

U sklopu radnog dijela škole priređeno je i rješavanje problemskih zadataka iz fizike koje su vodili studenti prve godine fizike na PMF-u Juraj Radić i Zvonimir Vlah (inače bivši sudionici natjecanja i ljetnih škola). To je organizirano u poslijepodnevnim satima u prostoru hotela "Marina" u Rapcu, gdje su učenici i predavači bili smješteni.

Izvannastavne aktivnosti bile su, također, vrlo bogate i raznovrsne. Posjetili smo muzej u starom gradu Labinu gdje smo, uz ostalo, prošli i kroz model rudnika. Središnjeg dana škole organiziran je cjelodnevni izlet brodom na otok Cres s kupanjem, ribljim roštiljem na brodu i obilaskom mjesta Cres. U petak smo posjetili i termoelektranu Plomin 2 gdje smo u praksi mogli vidjeti vezu između fizike, kemije, ekologije i moderne tehnologije. Pridodamo li tome još i kupanje, odbojku na pijesku, stolni tenis i niz drugih slobodnih aktivnosti, jasno je da su učenici u potpunosti iskoristili vrijeme provedeno u Labinu i Rapcu.

Golem doprinos organizaciji škole dali su domaćini, profesori i ostali djelatnici Srednje škole Mate Blažine s ravnateljem Čedomirom Ružićem i profesorom Željkom Brenčićem na čelu. Njihova logistička potpora u organiziranju prostora, tehnike, prijevoza i rješavanju niza sitnih detalja bila je od neprocjenjive vrijednosti. Jednako susretljivi bili su i domaćini u hotelu "Marina", od direktora do djevojaka na recepciji.

Građanima Labina i Rapca pokušali smo se odužiti javnom pretpremijernom projekcijom popularnoznanstvenog filma Antonija Šibera "Sfere unutar sfera" (`http://sfere.ifs.hr`). Sudeći prema punoj dvorani, unatoč velikoj vrućini, interes za takvu projekciju bio je velik.

Ovogodišnja ljetna škola dobila je i nešto veći publicitet. Svečano otvorenje, na kojem smo vidjeli i pregled mnogobrojnih aktivnosti škole domaćina, svojom nazočnošću uveličali su Vinko Filipović, ravnatelj Zavoda za školstvo Republike Hrvatske, prof. dr. Zdravko Lenac, prorektor Sveučilišta u Rijeci, prof. dr. Zvjezdana Roller-Lutz, dopredsjednica Hrvatskog fizikalnog društva, predstavnici grada Labina, Istarske županije i nekih sponzora. U radu škole sudjelovao je i dr. Anđelko Tečić iz Zavoda za školstvo, koji se, slušajući dio predavanja, o njima vrlo pozitivno izrazio.

I mediji su posvetili dio prostora ovoj školi pa je o njoj pisao Glas Istre, La Voce di Popolo, a i jedna polusatna emisija na Radio Labinu bila je posvećena školi.

Sudionici ljetne škole odabrani su na temelju rezultata na Državnom natjecanju iz fizike, rješavanja zadataka u Matematičko-fizičkom listu, a bila su i tri sudionika iz Subotice uz potporu Ureda za međunarodnu suradnju MZOŠ. Evo popisa učenika koji su sudjelovali na školi:

Ivan Domladovec, OŠ Matije Gupca, Zagreb; *Ilijan Kotarac*, OŠ Kneza Trpimira, Kaštel Gomilica; *Slaven Mišak*, I. OŠ "Varaždin", Varaždin; *Irma Telarović*, I. OŠ Dugave, Zagreb; *Manuela Činko*, OŠ "Buzet PŠ Roč", Roč; *Filip Dumbović*, OŠ Eugena Kumičića, Velika Gorica; *Ivan Šandrk, Mario Volarević, Matija Varga* i *Petar Mrazović*, V. gimnazija, Zagreb; *Juraj Klarić* i *Jelena Kristina Željeznjak*, XV. gimnazija, Zagreb; *Ivan Peris* i *Albert Ćosić*, Gimnazija "Karlovac", Karlovac; *Luka Štambuk* i *Silvio Đonlić*, III. gimnazija, Split; *Josip Klapač*, Zrakoplovna tehnička škola, Velika Gorica; *Nikolina Artić*, SŠ "Krapina", Krapina; *Mario Menix*, Gimnazija "Metković", Metković; *Vedran Brdar, Kruno Lenac* i *Nikola Marković*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka; *Mijo Tvrdojević*, Gimanzija Matije Mesića, Slavonski Brod; *Dario Đurđević*, Elektrotehnička i prometna škola, Osijek; *Mirjana Horvacki* i *Josip Čović*, Gimnazija, Subotica; *Matija Bakos* i *Miljenko Bujanić*, Gimnazija "Čakovec", Čakovec; *Tomislav Bronić* i *Stjepan Vučković*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb; *Lovre Bošnjak*, SŠ fra Andrije Kačića Miošića, Ploče; *Ivan Rančić* i *Marija Mustać*, Gimnazija Frane Petrića, Zadar; *Ivan Vidić*, Zadarska privatna gimnazija, Zadar; *Ivan Habrka* i *Neven Čaplar*, I. gimnazija, Zagreb; te nastavnici *dr. Valter Krajcar*, Gimnazija, Gospić i *Stipan Stantić, prof.*, Biskupijska klasična gimnazija "Paulinum", Subotica.

I ovogodišnja Ljetna škola održana je uz financijsku potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Instituta "Ruđer Bošković", Instituta za fiziku u Zagrebu i École Politechnique Fédérale de Lausanne, a posebno zahvaljujemo sljedećim sponzorima: Grad Zagreb, Istarska županija, Grad Labin, Dalekovod d.d., Rabac d.d., TE Plomin d.d., Holcim d.d. te općine Raša, Pićan, Kršan i Nedešćina. Kao voditelj, zahvaljujem svim članovima organizacijskog odbora ljetne škole na ugodnom timskom radu, a posebno dr. Marini Ilakovac Kveder, dr. Ani Smontari i dr. Antoniju Šiberu.

Mnogo više detalja, kao i fotoalbum s ovogodišnje ljetne škole možete pronaći na `www.hfd.hr/ljskola`.

Miroslav Požek, voditelj ljetne škole

⋆ ⋆ ⋆

Neka me ne čita onaj koji nije matematičar prema mojim načelima.

Leonardo Da Vinci (1452. – 1519.),
talijanski slikar, kipar, graditelj i znanstvenik

Suprafluidno stanje fermionskog plina

Ante Bilušić[1], *Zagreb*

Američki su znanstvenici s Instituta za tehnologiju Massachusettsa (Massachusetts Institute of Technology (MIT)) u Bostonu (SAD) po prvi put eksperimentalno dokazali postojanje suprafluidnog stanja u fermionskom plinu [1]. Nakon otkrića Bose-Einsteinovog kondenzata prije gotovo deset godina (o čemu je pisao i Matematičko-fizički list u broju 3/195 od 1999. godine [2]), ovo je još jedan revolucionarni eksperiment koji nam otkriva svu čarobnost svijeta kvantne fizike.

Sve se elementarne čestice u prirodi, po iznosu svog vlastitog zakretnog momenta (spina), mogu podijeliti u dvije kategorije: na fermione (poput elektrona i kvarkova) i bozone (fotoni i gluoni, primjerice). Dok je spin bozona cjelobrojni višekratnik reducirane Planckove konstante $\hbar$ (jednake Planckovoj konstanti podijeljenoj s 2π), fermioni imaju spin jednak polucjelobrojnom višekratniku $\hbar$ (na primjer, $\hbar/2$). Fermione i bozone razlikuje jedna fundamentalna razlika: dok za bozone nema ograničenja u popunjavanju kvantnih stanja (definiranih njihovim osnovnim svojstvima kao što su energija, spin ili zakretni moment), fermioni se podvrgavaju Paulijevom principu isključenja. On kaže da se dva fermiona ne mogu naći u jednakom kvantnom stanju. Hlađenjem bozona na vrlo niske temperature nastane tzv. Bose-Einsteinovo kondenzirano stanje u kojem sve čestice-bozoni zauzmu stanje najniže energije. Paulijev princip priječi da fermioni stvore kondenzirano stanje poput Bose-Einsteinovog.

Fermioni ipak pod određenim uvjetima mogu stvoriti kondenzirano stanje: njihovim međusobnim sparivanjem nastaju čestice cjelobrojnog spina i, prema tome, bozonskog karaktera. Nastanak kondenziranog stanja fermiona dovodi do zanimljivih pojava poput supravodljivosti i suprafluidnosti. U slučaju prijelaza metala u supravodljivo stanje elektroni tvore takozvane Cooperove parove, odnosno vezano stanje dvaju elektrona (ukupni spin Cooperovog para je jednak nuli) koji prenose električni naboj bez otpora. Suprafluidno stanje tekućine karakterizirano je njenim tokom bez viskoznosti (odnosno, bez otpora). Vrtnjom suprafluida on postaje ispunjen nizom sićušnih virova oko kojih kruže njegove čestice.

Znanstvenici s MIT-a su za dokazivanje suprafluidne prirode fermionskog plina koristili plin litija ^{6}Li ohlađen na vrlo nisku temperaturu. Najprije su litijev plin prostorno "zarobili" laserskom zrakom kružnog oblika (na naslovnici je ta zraka označena ružičastom bojom, a litij crvenom). Potom su dvije laserske zrake (označene zelenom bojom) usmjerene na rubove litijevog plina, čijom je vrtnjom na vrtnju prinuđen i sam plin. Plin je litija-6 bio vrlo hladan (i time u suprafluidnom stanju) te su se njegovom vrtnjom unutar njega stvorili suprafluidni virovi (označeni crnim točkicama). Virovi su jako malih dimenzija i trebalo je nekako raširiti da bi se mogli vidjeti. Zato je u određenom trenutku laserska zraka koja je zarobljavala plin isključena i plin se, zajedno s virovima, počeo širiti (to je skicirano na donjemu dijelu slike). Kao što smo već ranije rekli, da bi plin fermiona mogao postati suprafluidnim potrebno je postići međusobno vezanje između čestica. U slučaju litija-6 to je moguće vanjskim

[1] Autor je docent na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja Sveučilišta u Splitu, te vanjski suradnik Laboratorija za istraživanje toplinske vodljivosti Instituta za fiziku u Zagrebu, bilusic@pmfst.hr.

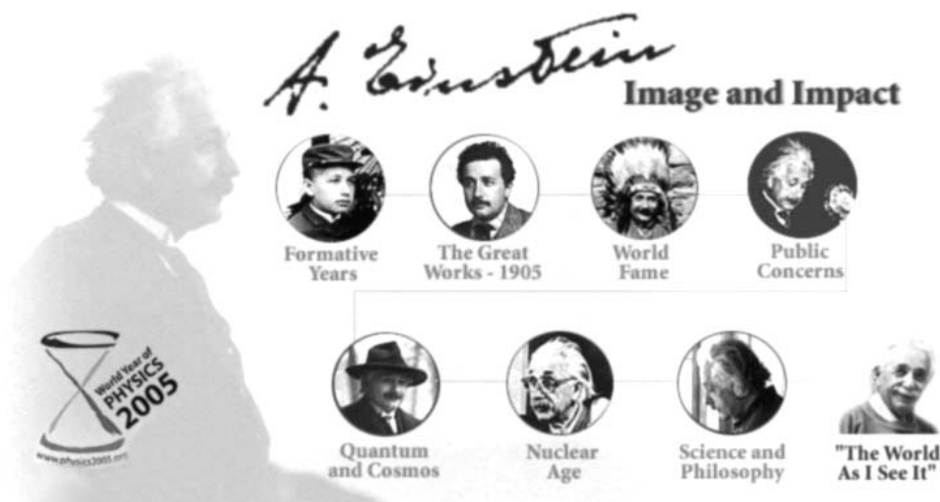
magnetskim poljem stvorenim zavojnicama (označene plavim torusima na slici). O jakosti magnetskog polja ovisi i jakost međusobnog vezivanja fermionskih čestica te možemo imati snažno (kao u slučaju Bose-Einsteinove kondenzacije) i slabo vezane čestice (analogno vezanjem elektrona u Cooperove parove). Relativno jednostavna mogućnost mijenjanja jačine međudjelovanja između čestica fermiona, pokazana ovim eksperimentom, znanstvenicima će omogućiti odgovore na mnoga do sada kontroverzna pitanja prisutna u fizici, od mehanizama ključnih za nastanak visokotemperaturne supravodljivosti, preko fizike neutronskih zvijezda pa sve do izučavanja takozvane kvark-gluonske plazme, jedne od ranih faza u razvoju Svemira. S veseljem iščekujemo odgovore na ta i još mnoga pitanja, o čemu ćemo vas redovito izvještavati na stranicama Matematičko-fizičkog lista.

Literatura

[1] M. W. Zweierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, W. Ketterle, *Nature* **435** (2005), 1047.

[2] S. Milošević, *Matematičko-fizički list*, **3/195**, god. XLIX, (1998./99.), 129.

⋆⋆⋆



Sve što želite znati o A. Einsteinu možete naći na adresi
`http://www.aip.org/history/einstein`



KVALIFIKACIJSKI ISPITI

Zadaci s prijemnog ispita na Matematičkom odjelu i Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu

Kao dio razredbenog postupka u prvom upisnom roku, 14. srpnja 2005. godine održan je test provjere znanja na PMF – Matematičkom odjelu i PMF – Fizičkom odsjeku. Uz dozvolu ovih institucija, donosimo zadatke koji su bili zadani na tom testu.

Test na PMF – Matematičkom odjelu sadržavao je zadatke M-1 – M-20, I-1 – I-5 i F-1 – F-8, a test na PMF – Fizičkom odsjeku zadatke M-1 – M-20 i F-1 – F-13.

Kod zadataka iz fizike možete uzeti da je $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $c = 300\,000\ \mathrm{km/s}$, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

⋆ ⋆ ⋆

M-1. Koliko ima dvoznamenkastih brojeva kojima je zbroj kvadrata znamenaka jednak 50?
A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 5 **E.** 3

M-2. Ako $a \nabla b$ označava $a^2 + 3^b$, onda je $(3\nabla 0)\nabla(1\nabla 0)$ jednako:
A. 84 **B.** 225 **C.** 109 **D.** 145 **E.** 181

M-3. Zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je $\dfrac{2005-n}{99}$ prirodan broj iznosi:
A. 20 000 **B.** 21 315 **C.** 20 790 **D.** 19 290 **E.** 19 310

M-4. Prirodnih brojeva n manjih od 2005 za koje je ispunjena jednakost $(1+i)^n = (1-i)^n$ (i je imaginarna jedinica) ima:
A. 1002 **B.** 501 **C.** 500 **D.** 2 **E.** 4

M-5. Ana, Ivana i Marija kupovale su na tržnici kod istog prodavača. Ana je kupila 5 kg jabuka, 7 kg naranči i 3 kg banana i ukupno je platila 107 kuna. Ivana je kupila 3 kg jabuka, 6 kg naranči i 1 kg banana i sve zajedno platila 73 kune. Marija je kupila 5 kg jabuka, 1 kg naranči i 2 kg banana i sve to platila 52 kune. Kolika je cijena jednog kilograma banana?
A. 7 kn **B.** 8 kn i 10 lp **C.** 9 kn **D.** 6 kn **E.** 8 kn

M-6. U četiri godine studija student je položio ukupno 24 ispita. Svake godine studija položio je više ispita nego prethodne. Ako je na četvrtoj godini položio dvaput više ispita nego na prvoj, koliko je ispita položio na drugoj godini?
A. 3 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 4 **E.** 6

M-7. Ako je $a = \dfrac{\log_7 6\,(\log_6 9 - \log_6 3)}{\log_5 16\,(\log_4 10 - \log_4 2)}$, onda 7^a iznosi:
A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** 6 **D.** $\dfrac{9}{40}$ **E.** $\dfrac{9}{32}$

M-8. Broj uređenih parova (x, y) realnih brojeva koji zadovoljavaju sustav $\begin{cases} |x| + y &= 4 \\ x^3 + |x|\,y &= 0 \end{cases}$ jednak je:
A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1 **E.** 0

M-9. Ako je $f(x)=e^x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\ln x$, tada je $(f\circ g\circ h)(x)$ jednako:
A. $\ln(2e^x)$ **B.** $2x$ **C.** $\ln^2(e^x)$ **D.** $e^{\ln^2 x}$ **E.** x^2

M-10. Graf funkcije $f(x)=4x^2+4x+2$ nalazi se u:
A. prvom i drugom kvadrantu **B.** prvom i četvrtom kvadrantu
C. drugom i trećem kvadrantu **D.** drugom kvadrantu **E.** prvom kvadrantu

M-11. Točka $(1,2)$ ne pripada grafu funkcije:
A. $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}$ **B.** $f(x)=4\log\sqrt{x^2+x+8}$ **C.** $f(x)=2^{-\log(x+9)}$
D. $f(x)=2\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ **E.** $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)}$

M-12. Broj uređenih parova (x,y), pri čemu su $x,y\in[-\pi,\pi]$, koji zadovoljavaju sustav jednadžbi $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y &=2\\ \sin^2 x+\sin^2 y &=0\end{cases}$ je:
A. 3 **B.** 9 **C.** 6 **D.** 1 **E.** 4

M-13. Ako je sinus nekog kuta jednak a, tada je kosinus njemu komplementarnog kuta jednak:
A. $\dfrac{1}{a}$ **B.** $\sqrt{1-a^2}$ **C.** $-a$ **D.** $-\sqrt{1-a^2}$ **E.** a

M-14. Koja od sljedećih funkcija ima najmanji osnovni period?
A. $\sin x+\cos x$ **B.** $\sin^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$ **C.** $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}$
D. $\sin 2x\cos 2x$ **E.** $\sin^2 x+\sin x+\cos^2 x$

M-15. Točke $A=(-4,-5)$, $B=(-1,1)$, $C=(2,7)$
A. određuju raznostraničan trokut **B.** određuju jednakokračan trokut
C. leže na jednom pravcu **D.** određuju jednakostraničan trokut
E. određuju pravokutan trokut

M-16. Na kružnici polumjera R nalazi se središte druge kružnice, polumjera $\dfrac{2}{3}R$. Sjecišta tih dviju kružnica određuju tetivu duljine:
A. $\sqrt{2}R$ **B.** $\dfrac{5}{7}\sqrt{2}R$ **C.** $\dfrac{6}{7}\sqrt{2}R$ **D.** $\dfrac{7}{8}\sqrt{2}R$ **E.** $\dfrac{8}{9}\sqrt{2}R$

M-17. Jedan kut trokuta je dva puta veći od drugog, a šest puta veći od trećeg. Najmanji kut tog trokuta iznosi:
A. 18° **B.** 54° **C.** 9° **D.** 36° **E.** 20°

M-18. Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je dvostruko manja od duljine kraka. Ako je površina tog trokuta jednaka $16\sqrt{15}$, tada je duljina osnovice:
A. $4\sqrt{3}$ **B.** 8 **C.** 32 **D.** 16 **E.** 4

M-19. Metalna pravilna četverostrana piramida s osnovnim bridom duljine 9 cm i visinom duljine 8 cm pretopljena je u kocku. Duljina brida tako dobivene kocke iznosi:
A. 8.5 cm **B.** $6\sqrt{3}$ cm **C.** $6\sqrt[3]{3}$ cm **D.** 6 cm **E.** 9 cm

M-20. Trostranoj uspravnoj prizmi osnovka je pravokutan jednakokračan trokut duljine kraka 10. Oplošje prizme je 200. Volumen prizme je:
A. $200(2+\sqrt{2})$ **B.** $250(2-\sqrt{2})$ **C.** $375(2-\sqrt{2})$

D. $500(2+\sqrt{2})$ **E.** $400(2-\sqrt{2})$

I-1. Logička formula $((A \to B) \to A) \wedge (B \to A)$ ekvivalentna je formuli:
A. B **B.** $A \vee \neg B$ **C.** $A \leftrightarrow B$ **D.** $A \wedge \neg A$ **E.** A

I-2. Produkt brojeva $(ABC)_{16}$ i $(FFF)_{16}$ je:
A. $(ABCFFF)_{16}$ **B.** $(ABB444)_{16}$ **C.** $(ABB544)_{16}$ **D.** $(ABC000)_{16}$ **E.** $(ABB644)_{16}$

I-3. Najmanja baza b za koju je broj $(b00)_{b+1}$ strogo manji od broja $(2100)_{b-1}$ je:
A. 7 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 6

I-4. Sto će ispisati sljedeći algoritam?

$a := 0$;
$b := 1$;
dok je $b < 100$ **činiti**
  $c := a + b$;
  $a := b$;
  $b := c$;
izlaz (c) ;

A. 1 **B.** 100 **C.** 233 **D.** 144 **E.** 89

I-5. Prirodni broj n za kojeg će sljedeći algoritam ispisati rezultat 3141593 je:

ulaz (n) ; $s := 0$;
dok je $n > 0$ **činiti**
  $s := 10 * s + 9 - (n$ **mod** $10)$;
  $n := n$ **div** 10 ;
izlaz (s) ;

A. 9 999 999 **B.** 6 858 406 **C.** 6 048 586 **D.** 3 951 413 **E.** 3 141 593

F-1. Kameni blok mase 10 kg vučemo po horizontalnoj podlozi silom 50 N paralelno s podlogom. Koliko će biti ubrzanje kamenog bloka ako je koeficijent trenja između bloka i podloge 0.1?
A. 4 m/s^2 **B.** 9.81 m/s^2 **C.** 2.1 m/s^2 **D.** 5.6 m/s^2 **E.** 11 m/s^2

F-2. Kuglica mase 1 kg vozi se na kolicima mase 2 kg brzinom 5 m/s. U jednom trenutku kuglica se izbaci iz kolica i nastavi se gibati u suprotnom smjeru brzinom 2 m/s. Kolika je brzina kolica nakon ispadanja kuglice?
A. 6.6 m/s **B.** 10.5 m/s **C.** 2.2 m/s **D.** 5.6 m/s **E.** 8.5 m/s

F-3. Greda mase 4 kg položena je na stol tako da joj 1/3 dužine viri izvan stola. Kolika može biti maksimalna masa utega kojeg ćemo objesiti na slobodni rub grede, a da se ona ne prevrne preko ruba stola?
A. 1 kg **B.** 5 kg **C.** 2 kg **D.** 3 kg **E.** 4 kg

F-4. Masa planeta Jupitera je $1.9 \cdot 10^{27}$ kg, a njegov polumjer $7 \cdot 10^{7}$ m. Kolika je akceleracija sile teže na površini Jupitera? Gravitacijska konstanta iznosi $6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.
A. 13.4 m/s^2 **B.** 25.9 m/s^2 **C.** 9.81 m/s^2 **D.** 32.2 m/s^2 **E.** 38.4 m/s^2

F-5. Na koju temperaturu treba izobarno ohladiti plin da mu se volumen smanji tri puta u odnosu na volumen pri 80°C?
A. 117.7 K **B.** 20°C **C.** 26.7 K **D.** 350 K **E.** 270 K

F-6. Glazbena viljuška frekvencije 495 Hz približava nam se brzinom od 20 m/s. Koliku frekvenciju viljuške mi čujemo, ako je brzina zvuka u zraku 330 m/s?
A. 527 Hz **B.** 495 Hz **C.** 467 Hz **D.** 557 Hz **E.** 391 Hz

F-7. Elektron ubrzan naponom 200 V ulazi u magnetsko polje čije su silnice okomite na brzinu, te se u polju giba po kružnici nekog polumjera. Koliki ga napon mora ubrzati da bi kružio po kružnici dvostruko većeg polumjera u istom polju?
A. 400 V **B.** 800 V **C.** 100 V **D.** 600 V **E.** 200 V

F-8. Dva duga, paralelna vodiča udaljena su 1 m, a njima teku jednake struje od 10 mA u istom smjeru. Koliko je magnetsko polje u točki koja se nalazi na sredini spojnice dva vodiča?
A. $8 \cdot 10^{-9}$ T **B.** $2 \cdot 10^{-9}$ T **C.** $6 \cdot 10^{-9}$ T **D.** 0 T **E.** $4 \cdot 10^{-9}$ T

F-9. Tijelo mase 10 kg bacimo s visine od 20 m bez početne brzine. Tijelo padne na pješčano tlo i prodre u njega. Kolika je srednja sila otpora pijeska ako je tijelo prodrlo do dubine od 1 m?
A. 1110 N **B.** 2100 N **C.** 3200 N **D.** 200 N **E.** 4150 N

F-10. Automobil se giba po horizontalnoj kružnoj putanji polumjera 42 m tangencijalnim ubrzanjem 2 $\mathrm{m/s^2}$. Kolika je početna brzina automobila ako prvi krug prođe za 12 s?
A. 54 km/h **B.** 14 km/h **C.** 10 km/h **D.** 36 km/h **E.** 25 km/h

F-11. Da bismo ohladili vodu mase 30 kg s 80°C na 10°C stavimo u nju komad leda temperature 0°C. Kolika mora biti masa leda ako se cijeli led pri hlađenju otopi? Toplinski kapacitet vode je 4.19 kJ/(kgK), a specifična toplina taljenja leda je 335 kJ/kg.
A. 10.24 kg **B.** 13.25 kg **C.** 35.33 kg **D.** 16.25 kg **E.** 23.35 kg

F-12. Konkavno sferno zrcalo daje od realnog predmeta tri puta uvećanu, obrnutu sliku. Slika i predmet su međusobno udaljeni 16 cm. Kolika je žarišna duljina zrcala?
A. 5 cm **B.** 1 cm **C.** 2 cm **D.** 3 cm **E.** 6 cm

F-13. Dva paralelno spojena kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 2\ \mu$F i $C_2 = 3\ \mu$F, spojena su na izvor elektromotorne sile od 24 V. Koliki je naboj na drugom kondenzatoru?
A. 12 μC **B.** 44 μC **C.** 56 μC **D.** 122 μC **E.** 72 μC

Rješenja zadataka

M–1	E	M–2	C	M–3	E	M–4	B	M–5	A
M–6	C	M–7	A	M–8	B	M–9	D	M–10	A
M–11	C	M–12	B	M–13	E	M–14	D	M–15	B
M–16	E	M–17	A	M–18	B	M–19	D	M–20	B
I–1	C	I–2	C	I–3	A	I–4	D	I–5	C
F–1	A	F–2	E	F–3	C	F–4	B	F–5	A
F–6	A	F–7	B	F–8	D	F–9	B	F–10	D
F–11	E	F–12	E	F–13	E				



Bridž — kombinatorna misaona igra s kartama zaslužila je svoju stranicu u MFL-u. Nemoguće je u par redaka približiti svu složenost ove igre, zato zainteresirane upućujemo na web stranicu `www.acbl.org` gdje će naći objašnjenja za početnike, ili na nedavno objavljenu knjigu autora ovog članka **Naučite bridž za deset dana i deset noći**, Element, Zagreb 2004.

Zato nećemo započeti objašnjavanjem pravila igre. Spomenut ćemo samo da je alat za igru špil od 52 karte podijeljen na četiri igrača te da za vrijeme igre jedan od njih karte drži položene na stolu, tako da ih svi mogu vidjeti. To omogućava svim igračima da prave precizne planove igre temeljene na vjerojatnosti raspodjela preostalih karata i logičkom zaključivanju. O tome će biti riječ u početku ovih napisa.

Da bismo mogli zaključivati na ispravan način, moramo znati vjerojatnosti raspodjela nedostajućih karata, Zato ćemo se u početku zabaviti kombinatornim računom koji poznaje svaki ambiciozniji bridž igrač.

1. Broj različitih dijeljenja (početnih rasporeda karata) u bridžu iznosi

$$N = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

Ako na milijun stolova svakih 10 minuta započinje nova partija, koliko je očekivano vrijeme do ponavljanja istovjetne pozicije na bilo koja dva stola? (Zadatak nije lagan.)

Trinaest karata koje dobije svaki igrač naziva se **list**. Njega čine karte četiriju boja: tref, karo, herc i pik. Broj karata pojedine boje važan je čimbenik u igri. Razdiobu listova prema broju karata u različitim bojama zovemo **distribucija**. Tako na primjer, distribucija može biti 4-4-3-2, 5-4-2-2 ili pak 7-2-2-2. Pri tom u istu distribuciju svrstavamo sve listove neovisno o udabiru boja, tako ovu posljednju čine skupina od četiri različita lista, već prema tome koja je boja 7-karatna. Boje u distribuciji 4-4-3-2 možemo odabrati na 12 različitih listova, jer se na 4 načina može odabrati boja koja će imati 2 karte, a zatim na tri načina druga koja će imati 2 karte. Boje u distribuciji 5-4-3-1 možemo rasporediti na čak 24 različita načina.

2. Koliko različitih distribucija postoji? Prebrojite sve, od 4-3-3-3 do 13-0-0-0.

Vjerojatnost da ćemo dobiti list sa 13 karata iste boje je $4 \cdot \frac{13!}{52!} = 0.0000000006\%$. S druge strane, postotak listova s distribucijom 4-4-3-2 iznosi 21.5%. Evo kako dolazimo do tog računa. Broj načina na koje možemo odabrati 4 karte u piku je $\binom{13}{4}$, 4 karte u hercu $\binom{13}{4}$, 3 karte u kari $\binom{13}{2}$ i 2 karte u trefu $\binom{13}{2}$. Sve distribucije 4-4-3-2 dobit ćemo tako da pomnožimo ove brojeve i zatim permutiramo boje, što se može učiniti na 12 načina. Zato je postotak distribucije 4-4-3-2 u svim dijeljenjima

$$12 \cdot \binom{13}{4}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{2} \Big/ \binom{52}{13}$$

3. Izračunaj vjerojatnost dobivanja lista s distribucijom 5-4-3-1.

4. Napiši program koji će kao rezultat dati sljedeći izračun vjerojatnosti (u postocima) svih mogućih distribucija:

4-4-3-2	21.551	5-5-3-0	0.895
5-3-3-2	15.517	6-5-1-1	0.705
5-4-3-1	12.931	6-5-2-0	0.651
5-4-2-2	10.580	7-2-2-2	0.513
4-3-3-3	10.536	7-4-1-1	0.392
6-3-2-2	5.642	7-4-2-0	0.362
6-4-2-1	4.702	7-3-3-0	0.265
6-3-3-1	3.448	8-2-2-1	0.192
5-5-2-1	3.174	8-3-1-1	0.118
4-4-4-1	2.993	8-3-2-0	0.109
7-3-2-1	1.881	7-5-1-0	0.109
6-4-3-0	1.326	6-6-1-0	0.072
5-4-4-0	1.243	ostalo	0.093

5. Kolika je vjerjatnost da ćemo u sljedećem dijeljenju dobiti list s točno 6 pikova?

6. Ako smo dobili list s točno 6 pikova, kolika je vjerojatnost da su preostali pikovi u drugim rukama raspoređeni 3-2-2?

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 170

Rješenje.

$$\begin{aligned}\frac{27\,000\,008^2-90\,004^3}{100\,000}&=\frac{(3^3\cdot 10^6+2^3)^2-(3^2\cdot 10^4+2^2)^3}{10^5}\\&=\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 10^4\cdot(400-90\,000-4)}{10^5}\\&=\frac{108\cdot(-89\,604)}{10}=-967\,723.2.\end{aligned}$$

Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:

1. *Nikolina Artić* (1), Srednja škola "Krapina", Krapina; 2. *Erna Fekete* (4), III. gimnazija, Osijek; 3. *Marko Hajba* (2), Gimnazija P. Preradovića, Virovitica; 4. *Luka Rimanić* (2), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka; 5. *Luka Žunić* (2), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka.

Riješili zadatke iz br. 3/219

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Nikolina Artić* (1), Srednja škola "Krapina", Krapina, 2926, 2927; *Mislav Cvitković* (3), Franjevačka klasična gimnazija, Sinj, 2926, 2927; *Mirko Čorić* (3), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 2923–2928, 2931, 2932; *Hana Fatkić* (1), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2923, 2926–2928; *Erna Fekete* (4), III. gimnazija, Osijek, 2923, 2924, 2926–2928, 2931–2934; *Marina Furkes* (1), Gimnazija F. Galovića, Koprivnica, 2928; *Marko Jovović* (1), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2923, 2925–2928; *Vedran Karahodžić* (1), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2924–2928; *Marin Mišur* (2), Gimnazija "Metković", Metković, 2923, 2926; *Luka Rimanić* (2), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka, 2923–2929, 2931–2933, 2935; *Edin Šalaka* (1), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2923, 2926–2928; *Goran Šeketa* (1), Gimnazija "Karlovac", Karlovac, 2924, 2926, 2927; *Goran Šibenik* (1), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2923, 2926–2928; *Marina Škaričić* (3), IV. gimnazija M. Marulića, Split, 2924, 2926, 2927, 2931; *Filip Topić* (3), Gimnazija "Varaždin", Varaždin, 2923–2928, 2931, 2932; *Menil Vuković* (1), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2923, 2927, 2928; *Luka Žunić* (2), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka, 2923–2929, 2931–2933, 2935.

b) Iz fizike: *Andrej Grašić* (8), OŠ braće Radića, Koprivnica, 227; *Silvija Konjić* (7), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 227; *Ivan Poparić-Grgas* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 226–228; *Ivana Vukičević* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 226–228; *Mislav Cvitković* (3), Franjevačka klasična gimnazija, Sinj, 1301, 1303, 1304, 1306.

Nagradni natječaj br. 172

Kvadratura pravokutnika

Poznato je da nije moguće samo pomoću ravnala i šestara konstruirati kvadrat kojemu bi površina bila jednaka površini danog kruga.

Konstruirajte, samo pomoću ravnala i šestara, kvadrat čija površina će biti jednaka površini danog pravokutnika.

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2005./2006. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/III, 10001 Zagreb,
tel./fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Naslovnica ovog broja Matematičko-fizičkog lista donosi skicu eksperimenta kojim je dokazana suprafluidnost fermionskog plina. Više o tome možete pročitati na 65. stranici ovog broja Lista te na web stranicama eksperimentalne grupe s Massachusetts instituta za tehnologiju u Bostonu (SAD) koja je provela navedeni eksperiment (**http://cua.mit.edu/ketterle_group/experimental_setup/BEC_I/Portal.html**).

Dragi čitatelji!

Čitava ova godina je proglašena godinom fizike kako bi se obilježila 100-godišnjica vrlo važnih otkrića u ovoj prirodnoj znanosti, a s ciljem jačanja interesa, ne samo kod učenika, već i veće senzibiliziranje sveopće javnosti za fiziku i sve njezine grane. Tim povodom koprivničku gimnaziju Frana Galovića posjetila je grupa znanstvenika s Instituta za fiziku u Zagrebu koji su održali predavanja, izveli niz atraktivnih pokusa i time doprinijeli projektu Hrvatskog fizikalnog društva za obilježavanje godine fizike pod nazivom "Ljepota fizike".

Tijekom dva tisučljeća, od Aristotela do Newtona, fizika je bila grana filozofije. U 17. stoljeću fizika se profilirala kao zasebna znanstvena grana koja i dalje ostaje predmetom filozofskih promišljanja. O tome nas upoznaje Tihomir Vukelja, sa Zavoda za povijest, flozofiju i sociologiju znanosti Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Milivoj Uroić, s istog fakulteta, u članku *Optika iz Fermatove perspektive* upoznaje nas s jednim jednostavnim pravilom iz optike – Fermatovim principom.

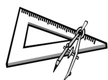
U prilogu iz matematike, *O ekvipotentnosti (jednakobrojnosti) skupova*, student s Fakulteta elektrotehnike i računarstva, Igor Smud, opisuje kako uspostaviti bijekciju između skupova $[0, 1]$ i $(0, 1]$ i tako pokazati da su oni jednakobrojni. Profesor matematike na Željezničkoj tehničkoj školi u Zagrebu, Petar Svirčević, koristeći *AG* nejednakost opisuje jedno zanimljivo svojstvo trokuta i tetraedra, a onda daje i odgovarajuće svojstvo koje vrijedi u višedimenzionalnim prostorima. S jednom elementarnom nejednakošću koja ima primjenu na mnogim zadacima upoznaje nas profesor s Prirodno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Sarajevu. Lončar Predrag, predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu, navodi Hadwiger-Finslerovu nejednakost i razne posljedice koje iz nje slijede.

Dario Hrupec s Instituta "Ruđer Bošković" ima prilog iz astronimije *Tipične zablude o velikom prasku.* U rubrici Novosti iz znanosti nalazi se kratka notica o dobitnicima ovogodišnje Nobelove nagrade za fiziku.

Rudi Mrazović i Kristina Škreb, prošlogodošnji učenici V. gimnazije u Zagrebu, sudionici 47. međunarodne matematičke olimpijade koja je održana u Meksiku, pišu o zapaženom uspjehu hrvatske olimpijske ekipe koja je osvojila jednu srebrnu i dvije brončane medalje. U Gospiću je održana 14. državna smotra i natjecanje mladih fizičara, o čemu nas izvještava Krešo Zadro. Donosimo i zadatke s prijemnog ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu.

Na zadnjoj strani omota prisjetili smo se Vinka Dvořăka, redovitog profesora fizike na Sveučilištu u Zagrebu, vrsnog eksperimentatora i priznatog znanstvenog radnika, utemeljitelja fizikalnog kabineta na Sveučilištu u Zagrebu.

Uredništvo lista



MATEMATIKA

O ekvipotentnosti (jednakobrojnosti) skupova

Igor Smud[1]

Lako je razumjeti dogovor da su dva skupa *ekvipotentna* ili *jednakobrojna* ako imaju isti broj elemenata. No ponekad je teško skupove prebrojiti. Pogotovo ako imaju jako puno elemenata (da ne kažem beskonačno). Srećom, da bismo odredili da li su dva skupa ekvipotentna, nije potrebno prebrojati sve njihove elemente. Dovoljno je uspostaviti vezu (tj. preslikavanje ili funkciju) među njihovim elementima, ali na taj način da:

a) svaki element iz prvog skupa ima svoj jedini par u drugom skupu (injektivnost funkcije);
b) svaki element iz drugog skupa dobiven je preslikavanjem nekog elementa iz prvog skupa (surjektivnost funkcije).

To preslikavanje, znači, mora biti bijektivno (tj. injektivno i surjektivno). Možda nije očevidno da tada možemo zaključiti da dva skupa imaju jednak broj elemenata.

Ako je funkcija bijektivna, to znači da je injektivna i surjektivna. Da bismo objasnili ove pojmove, uzmimo, na primjer, da imamo $N = 10$ golubova (prvi skup, domena funkcije) u jednoj kutiji, koje je potrebno staviti u M krletki (drugi skup, kodomena). Mi zapravo moramo golubove "preslikati" u krletke.

Da bi to preslikavanje bilo surjektivno, znači da za svaku krletku moramo imati barem jednog goluba koji ide u nju (on ju "pogađa"), tj. broj krletki je manji ili jednak broju golubova (broj krletki će biti manji ako više golubova ide u istu krletku), tj. $M \leqslant N$.

Ukoliko želimo da to preslikavanje bude injektivno, moramo različitim golubovima pridružiti različite krletke (tj. u svakoj krletci najviše je jedan golub), što znači da moramo imati barem onoliko krletki koliko imamo golubova, tj. $M \geqslant N$ (neke krletke mogu ostati prazne).

Bijektivno preslikavanje zahtijeva da oba ova uvjeta budu ispunjena, što nas lagano navodi na zaključak da je $M = N$, tj. broj krletki mora biti jednak broju golubova. Možemo zaključiti da će dva skupa biti ekvipotentna ukoliko možemo uspostaviti bijektivno preslikavanje među njihovim elementima.

Zanimljivo je da ukoliko uspoređujemo dva beskonačna ekvipotentna skupa, oni će i dalje biti ekvipotentni ukoliko jednom od njih izbacimo konačan broj elemenata. Pogledajmo dva beskonačna skupa koji se razlikuju za samo jedan element, skupove [0,1] i (0,1]. To su dva podskupa skupa realnih brojeva. Drugi skup je nastao iz prvog izbacivanjem elementa 0.

Konstruirajmo sada bijekciju $f : [0, 1] \to (0, 1]$. Funkcija zadana kao identiteta $f(x) = x$ jest bijekcija, ali ne ostvaruje željenu bijekciju iz [0,1] u interval (0,1], pa ćemo ju malo promijeniti. Konstruirajmo skup $S \subseteq [0, 1]$,

$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$, takav da za svaki $i \neq j$ vrijedi da je $x_i \neq x_j$ i da je $x_1 = 0$.

[1] Autor je student 3. godine Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, e-mail: igor.smud@fer.hr

Zašto baš ovakav skup? Zato da bismo nuli (koja je u skupu [0,1]) pridružili element različit od nule, tj. stavimo $f(0) = x_2, f(x_2) = x_3,$ i općenito $f(x_n) = x_{n+1}$ i $n \geqslant 1$.

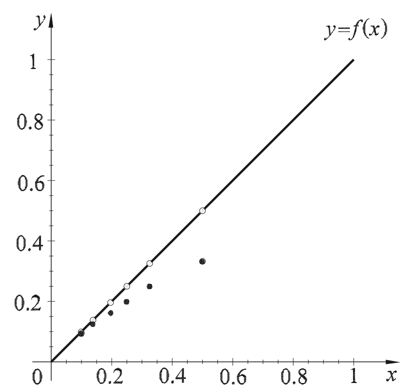
Očito je da je ovo preslikavanje bijekcija iz skupa $\{0, x_2, x_3, x_4, x_5, ...\}$ u skup $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...\}$ jer se radi o pomaku.

Znači, uz definiran skup $S = \{0, x_2, x_3, x_4, ...\} \subseteq [0, 1]$, dobili smo funkciju $f : [0, 1] \to (0, 1]$ definiranu s

$$f(x_n) = x_{n+1} \text{ za sve } x_n \in S,$$

$$f(x) = x \text{ za sve } x \notin S.$$

Uzmimo na primjer neki konkretan skup S. Neka je $S = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\} \subseteq [0, 1]$. Graf odgovarajuće funkcije dan je slikom 1.



Sl. 1. Graf bijekcije $f : [0, 1] \to (0, 1]$

Vrlo lako je uvjeriti se da je funkcija f bijekcija. Prema tome skup $[0, 1]$ i njegov (pravi!) podskup $(0, 1]$ su ekvipotentni.

Na ovaj način smo dokazali zanimljivu činjenicu da beskonačni skupovi koji na prvi pogled nemaju isti broj elemenata, zapravo imaju. Nadalje zanimljivo je primijetiti da ova funkcija ima prekide, a može se i pokazati da željena bijekcija iz $[0, 1]$ u $(0, 1]$ ne može biti neprekidna funkcija.

Beskonačni skupovi ponašaju se drugačije od konačnih. Pokušamo li naime izbaciti određen broj elemenata iz konačnog skupa, dobiveni skup više neće imati jednak broj elemenata kao prvotni skup.

Ovime smo stekli mali uvid u dio matematike koja proučava skupove, a u kojoj se krije puno drugih zanimljivih stvari.

Literatura

[1] PAVLE PAPIĆ: *Uvod u teoriju skupova*, Matkina biblioteka, Zagreb, 2000.

[2] DARKO ŽUBRINIĆ: *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 2001.

[3] Drexel University: *Math Forum: Descrete Math.*
URL: `http://mathforum.org/discrete/discrete.html` (02. 05. 2005.)

O jednom svojstvu težišta trokuta i tetraedra

Petar Svirčević[1], *Zagreb*

Koristeći aritmetičko–geometrijsku (AG) nejednakost formulirat ćemo i dokazati, na elementaran način, dva teorema o svojstvima težišta trokuta i težišta tetraedra, koja se često koriste u matematičkim primjenama.

Ovdje ćemo koristiti naziv *AG nejednakost*, a to znači nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine; tj.

$$A_n(a_1, ..., a_n) \geqslant G_n(a_1, ..., a_n), \tag{1}$$

gdje se broj

$$A_n(a_1, ..., a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2}$$

naziva *aritmetička sredina*, a broj

$$G_n(a_1, ..., a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \tag{3}$$

geometrijska sredina od nenegativnih realnih brojeva $a_1, ..., a_n$, tj. $a_1, ..., a_n \in R^+ \cup \{0\}$.

Svakako da (1) možemo preglednije pisati u obliku

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, \tag{4}$$

iz kojeg se vidi da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Ovu nejednakost u općem obliku prvi je dokazao A. L. Cauchy 1820., a do danas su dani i drugi dokazi. U ovom članku nećemo dati opći dokaz, koji se može naći u [1], nego ćemo dati provjeru, odnosno dokaze, samo za $n = 1, 2, 3, 4$. Iz (4) dobivamo $a_1 = a_1$ ako je $n = 1$, dakle uvijek se dobije jednakost.

Iz evidentne nejednakosti $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$ nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}, \tag{5}$$

pa je time dokazano (4) za slučaj $n = 2$.

Dokaz *AG nejednakosti* za slučaj $n = 3$ malo je teži. U prvom razredu srednje škole smo lako provjerili rastav $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, ili

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \geqslant 0, \tag{6}$$

uz uvjet $a, b, c \geqslant 0$; pa odatle slijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc. \tag{7}$$

[1] Autor predaje matematiku na Željezničkoj tehničkoj školi u Zagrebu, petar.svircevic@zg.hinet.hr

Ako uzmemo da je $a^3 = a_1,\ b^3 = a_2,\ c^3 = a_3$ i to supstituiramo u (7) dobivamo

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}. \tag{8}$$

I na kraju ćemo dokazati *AG nejednakost* za slučaj $n = 4$, koji je također jednostavan. Primijenimo li (5) dvaput na sumu od četiri nenegativna broja imamo

$$\frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)}{4} \geqslant \frac{2\sqrt{a_1 a_2} + 2\sqrt{a_3 a_4}}{4} = \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2}$$
$$\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

ili

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \tag{9}$$

Sada prelazimo na formuliranje i dokazivanje najavljenih teorema.

Teorem 1. Točka T unutar trokuta, čiji su vrhovi u točkama T_1, T_2, T_3, je njegovo težište ako i samo ako je produkt udaljenosti te točke od stranica trokuta maksimalan.

Dokaz. Neka je x_3 udaljenost točke T od stranice $\overline{T_1 T_2}$, x_1 udaljenost točke T od stranice $\overline{T_2 T_3}$ i x_2 udaljenost točke T od stranice $\overline{T_3 T_1}$, i konačno neka su duljine stranica

$$b_1 = |T_2 T_3|,\ b_2 = |T_3 T_1|,\ b_3 = |T_1 T_2|. \tag{10}$$

Ako je P površina $\Delta T_1 T_2 T_3$, tada vrijedi jednakost

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 2P. \tag{11}$$

Iz AG nejednakosti (8) dobivamo nejednakost

$$a_1 a_2 a_3 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^3, \tag{12}$$

pa ako to uvažimo i primjenimo na (11), slijedi nejednakost

$$b_1 x_1 \cdot b_2 x_2 \cdot b_3 x_3 \leqslant \left(\frac{2P}{3}\right)^3. \tag{13}$$

Jasno je da će u (13) vrijediti jednakost kada je

$$b_1 x_1 = b_2 x_2 = b_3 x_3 = \frac{2P}{3}. \tag{14}$$

Ako su h_1, h_2, h_3 duljine visina trokuta na stranice $\overline{T_2 T_3}$, $\overline{T_3 T_1}$, $\overline{T_1 T_2}$ respektivno, tada iz (14) slijedi $b_1 x_1 = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} b_1 h_1$ odnosno $x_1 = \frac{1}{3} h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_i = \frac{1}{3} h_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Iz analitičke geometrije znamo da je težište trokuta udaljeno od svake stranice za jednu trećinu duljine odgovarajuće visine.

U jednakosti (11) su sve veličine fiksne osim varijabli x_1, x_2, x_3, pa na osnovu (15) zaključujemo da je

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)_{\max} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 h_1 \cdot h_2 \cdot h_3, \tag{16}$$

što je i trebalo naći. Obrat se može lako napraviti, te je time teorem u potpunosti dokazan.

Teorem 2. Točka T unutar tetraedra, čiji su vrhovi u točkama T_1, T_2, T_3, T_4, gdje nikoje tri nisu kolinearne i niti sve četiri komplanarne, je njegovo težište onda i samo onda ako je produkt udaljenosti te točke od strana tetraedra maksimalan.

Dokaz. Budući su T_1, T_2, T_3, T_4 vrhovi tetraedra $T_1T_2T_3T_4$, tada njegovu bazu i plašt čine trokuti $\Delta T_1T_2T_3$, $\Delta T_2T_3T_4$, $\Delta T_3T_4T_1$, $\Delta T_4T_1T_2$, čije su površine $B_{123} = P(\Delta T_1T_2T_3)$, $B_{234} = P(\Delta T_2T_3T_4)$, $B_{341} = P(\Delta T_3T_4T_1)$, $B_{412} = P(\Delta T_4T_1T_2)$, a visine tetraedra na te baze neka su h_4, h_1, h_2, h_3 respektivno.

Na osnovu uvedenih oznaka jasno je da je volumen V tetraedra $T_1T_2T_3T_4$ dan s relacijama

$$V = \frac{1}{3}B_{123}h_4 = \frac{1}{3}B_{234}h_1 = \frac{1}{3}B_{341}h_2 = \frac{1}{3}B_{412}h_3. \tag{17}$$

Nadalje neka su udaljenosti točke T od strana tetraedra dane s

$$x_4 = d(T, \Delta T_1T_2T_3), \quad x_1 = d(T, \Delta T_2T_3T_4), \quad x_2 = d(T, \Delta T_3T_4T_1), \quad x_3 = d(T, \Delta T_4T_1T_2). \tag{18}$$

Iz (17) i (18) slijedi

$$B_{234}x_1 + B_{341}x_2 + B_{412}x_3 + B_{123}x_4 = 3V. \tag{19}$$

Treba naći točku T tako da bude

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)_{\max}. \tag{20}$$

Iz AG nejednakosti (9) dobivamo nejednakost

$$a_1a_2a_3a_4 \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4, \tag{21}$$

pa ako to uvažimo i primijenimo na (19), slijedi

$$B_{234}x_1 \cdot B_{341}x_2 \cdot B_{412}x_3 \cdot B_{123}x_4 \leqslant \left(\frac{3V}{4}\right)^4. \tag{22}$$

U (22) su sve veličine osim varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 fiksne, pa se pitamo kako naći (20)? Dakle, u (22) će vrijediti jednakost ako i samo ako je

$$B_{234}x_1 = B_{341}x_2 = B_{412}x_3 = B_{123}x_4 = \frac{3V}{4}, \tag{23}$$

a odatle je $B_{234}x_1 = \frac{3}{4}V = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}B_{234}h_1$ ili $x_1 = \frac{1}{4}h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_k = \frac{1}{4}h_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{24}$$

Iz statike znamo, da je težište tetraedra udaljeno od svake strane (baze i plaštnih trokuta) za jednu četvrtinu duljine odgovarajuće visine tetraedra, što se može dokazati na elementaran način pomoću *metode posebnih slučajeva* i *analitičke geometrije*.

Na osnovu (24) zaključujemo, da težište tetraedra ima svojstvo

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)_{\max} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4. \tag{25}$$

Relativno lako se može dokazati i obrat ove tvrdnje, pa je time i ovaj teorem u potpunosti dokazan.

Generalizacija: Točka T unutar *n-dimenzionalnog tetraedra*, čiji su vrhovi u točkama $T_1, T_2, ..., T_{n+1}$, gdje mora biti ispunjen uvjet nedegeneriranosti, je njegovo

težište ako i samo ako je produkt udaljenosti te točke od strana *n-dimenzionalnog tetraedra* maksimalan.

Taj opći slučaj se ne može dokazati na elementaran način, no napomenimo samo to da bi rezultat bio dan u obliku

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1})_{\max} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n+1}, \qquad (26)$$

što smo i očekivali, jer odatle specijalizacijom dobivamo (16) i (25) za $n = 2$ odnosno $n = 3$.

Literatura

[1] I. BRNETIĆ, *Nejednakosti među sredinama*, HMD, Zbornik radova (1. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske), Zagreb 2000.

[2] B. PAVKOVIĆ, B. DAKIĆ, Ž. HANJŠ, P. MLADINIĆ, *Male teme iz matematike*, HMD, Zagreb 1994.

[3] MURRAY R. SPIEGEL: *Theoretical Mechanics*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, McGRAW.

⋆⋆⋆

Cullenovi brojevi

Ima mnogo zanimljivh brojeva koji imaju neko dano svojstvo. Neki od njih su jako veliki i obično se ne poznaju svi takvi brojevi. Pojavom elektroničkih računskih strojeva bilo je omogućeno da se nađu još mnogi novi brojevi. No, kako god bio savršen računski stroj, on je ipak ograničen. Da li ima još koji veći broj? Najčešće je jedini način da se uz pomoć modernijih računala pokuša naći još neki.

Jedni od takvih brojeva su Cullenovi brojevi, a oni su oblika $C_n = n \cdot 2^n + 1$. Postavlja se pitanje da li ima konačno mnogo prostih Cullenovih brojeva. Za $n = 1$ je $C_1 = 3$ i on je prost. Tek je 1958. godine R. M. Robinson pokazao da je C_{141} sljedeći prost Cullenov broj. W. Keller je odredio sve Cullenove proste brojeve C_n za $n \leqslant 30\,000$. J. Young je 1997. godine našao sve takve brojeve za $n \leqslant 100\,000$. Y. Gallot je napravio program pomoću kojeg je bilo moguće naći sve proste Cullenove brojeve za $n \leqslant 633\,000$. U tabeli su dani svi do sada poznati prosti Cullenovi brojevi.

n	otkrivač	godina
481 899	M. Morii i Y. Gallot	1998
361 275	D. Smith i Y. Gallot	1998
262 419	D. Smith i Y. Gallot	1998
90 825	J. Young	1997
59 656	J.Young	1997
32 469	M. Morii	1997
32 292	M. Morii	1997
18 496	W. Keller	1984
6 611	W. Keller	1984
5 795	W. Keller	1984
4 713	W. Keller	1984
141	R. M. Robinson	1958
1	—	

Huygensova[1] nejednakost i njene primjene

Šefket Arslanagić[2], *Sarajevo*

U raznim područjima matematike, i njezine primjene, pojavljuju se raznorazne nejednakosti, a neke od njih upoznajemo još u srednjoj školi. Sada ćemo prikazati jednu elementarnu nejednakost koja se primjenjuje kod dokazivanja mnogih drugih.

Teorem. Ako su realni brojevi $x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, tada vrijedi nejednakost

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right)^n. \tag{1}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dokaz. Za pozitivne realne brojeve $x_i,\ y_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots n,$ promatrajmo brojeve $\dfrac{x_i}{x_i + y_i},\ \dfrac{y_i}{x_i + y_i}$. Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, $A \geqslant G$, za n pozitivnih realnih brojeva imamo:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_1 + y_1} + \frac{x_2}{x_2 + y_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_n + y_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1 + y_1} \cdot \frac{x_2}{x_2 + y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n + y_n}},$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1 + y_1} + \frac{y_2}{x_2 + y_2} + \ldots + \frac{y_n}{x_n + y_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{y_1}{x_1 + y_1} \cdot \frac{y_2}{x_2 + y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{x_n + y_n}}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1 + y_1}{x_1 + y_1} + \frac{x_2 + y_2}{x_2 + y_2} + \ldots + \frac{x_n + y_n}{x_n + y_n}\right)$$
$$\geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)}} + \sqrt[n]{\frac{y_1 y_2 \ldots y_n}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)}}$$

odnosno

$$\sqrt[n]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n}. \tag{2}$$

Stavljajući $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, nakon sređivanja, dobivamo (1). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Time je dokazana Huygensova nejednakost.

Sada ćemo na nekoliko primjera prikazati kako se nejednakost (1), odnosno (2), primjenjuje na dokazivanje raznih drugih nejednakosti.

Primjer 1. Neka je $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots n$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(1 + \frac{n}{S}\right)^n. \tag{3}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

[1] Christian Huygens (1639. – 1695.) je poznati holandski matematičar i fizičar, a velik dio života proveo je u Parizu.

[2] Autor je profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Sarajevu, e-mail: asefket@pmf.unsa.ba

Dokaz. Iz nejednakosti (1), za $x_i = \dfrac{1}{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, slijedi

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}\right)^n. \tag{4}$$

Koristeći AG nejednakost

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

odnosno, u obliku

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \geqslant \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}, \tag{5}$$

iz (1) i (5) dobivamo traženu nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Primjer 2. Neka su a, b, c i D bridovi i dijagonala pravokutnog paralelepipeda $ABCDEFGH$. Označimo kutove $\alpha = \sphericalangle ABH$, $\beta = \sphericalangle HBF$ i $\gamma = \sphericalangle HBC$. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right) \geqslant 64.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je paralelepiped kocka.

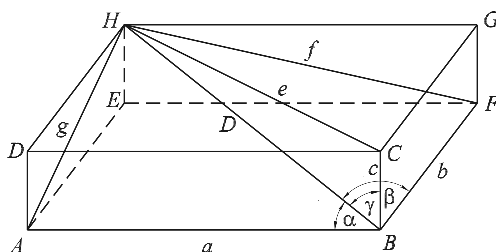
Dokaz. Uz oznake kao na slici imamo:

$$e = \sqrt{a^2+b^2},\ f = \sqrt{a^2+c^2},\ g = \sqrt{b^2+c^2},\ D = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{D},\ \cos\beta = \frac{b}{D},\ \cos\gamma = \frac{c}{D},$$

odakle dobivamo

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{7}$$



Iz (3) i (7), stavljajući $n = 3$, $a_1 = \cos^2\alpha$, $a_2 = \cos^2\beta$, $a_3 = \cos^2\gamma$, slijedi

$$\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right) \geqslant \left(1+\frac{3}{1}\right)^3 = 64.$$

Jednakost u (6) vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma$, tj. ako i samo ako je paralelepiped kocka.

Primjer 3. Ako su α, β, γ kutovi trokuta tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\gamma}\right) \geqslant \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \tag{8}$$

Dokaz. Stavljajući u (3) $a_1 = \sin\alpha$, $a_2 = \sin\beta$, $a_1 = \sin\gamma$, $S = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\gamma}\right) \geqslant \left(1+\frac{3}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\right)^3,$$

a radi poznate nejednakosti

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad (2.1 \text{ u } [3])$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

slijedi (8). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Primjer 4. Za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) \geqslant 9. \tag{9}$$

Dokaz. Uzimajući u (1) $x_1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x_2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $n = 2$, dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{|\sin x\cos x|}\right)^2,$$

a odavde, zbog $\dfrac{1}{|\sin x \cos x|} = \dfrac{2}{|\sin 2x|} \geqslant 2$, slijedi tražena nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sin^2 x = \cos^2 x$, tj. $|\sin x| = |\cos x| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Primjer 5. Neka su a, b, c stranice i R polumjer trokutu opisane kružnice. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{1}{c^2}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{3R^2}\right)^3. \tag{10}$$

Dokaz. Slijedi neposredno iz nejednakosti (3), uzimajući $a_1 = a^2$, $a_2 = b^2$, $a_3 = c^2$, $S = a^2 + b^2 + c^2$ i koristeći nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2, \qquad (5.13 \text{ u } [3]).$$

Jednakost u (10) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Primjer 6. Neka su h_a, h_b, h_c visine trokuta i $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg. Tada vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{h_a}\right)\left(1+\frac{1}{h_b}\right)\left(1+\frac{1}{h_c}\right) \geqslant \left(1+\frac{\sqrt{3}}{s}\right)^3. \tag{11}$$

Dokaz. Slijedi neposredno iz nejednakosti (3), uzimajući $a_1 = h_a$, $a_2 = h_b$, $a_3 = h_c$, $S = h_a + h_b + h_c$ i poznatu nejednakost

$$h_a + h_b + h_c \leq s\sqrt{3}, \qquad (6.1 \text{ u } [3]).$$

Jednakost u (11) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Primjer 7. Ako su m_a, m_b, m_c duljine težišnica trokuta i $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg, vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{m_a}\right)\left(1+\frac{1}{m_b}\right)\left(1+\frac{1}{m_c}\right) > \left(1+\frac{3}{2s}\right)^3. \tag{12}$$

Dokaz. Slijedi neposredno iz nejednakosti (3) za $a_1 = m_a$, $a_2 = m_b$, $a_3 = m_c$, $S = m_a + m_b + m_c$ i poznate nejednakosti

$$\frac{3}{2}s < m_a + m_b + m_c < 2s, \quad (8.1 \text{ u } [3]).$$

Primjer 8. Dani su realni brojevi x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. takvi da je $0 < x_k \leqslant 1$. Tada vrijedi nejednakost

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \leqslant (1-\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})^n. \tag{13}$$

Dokaz. Imamo

$$\frac{1}{x_1\ldots x_n} = \left(1+\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right). \tag{*}$$

Iz (1) i (*) dobivamo

$$\left(1+\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\right)\ldots\left(1+\left(\frac{1}{x_n}-1\right)\right) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_n}-1\right)}\right)^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{x_1\ldots x_n} \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\frac{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}{x_1\ldots x_n}}\right)^n,$$

a odavde slijedi tražena nejednakost. Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n$.

Primjer 9. Izračunati

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n+\sqrt[n]{n!}\right)^n}{(n!)^2}.$$

Rješenje. Stavljajući u (1) $x_i = \dfrac{k}{i}$, $k > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dobivamo

$$\left(1+\frac{k}{1}\right)\left(1+\frac{k}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{k}{n}\right) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\frac{k^n}{n!}}\right)^n, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{(1+k)(2+k)\ldots(n+k)}{n!} \geqslant \left(1+\sqrt[n]{\frac{k^n}{n!}}\right)^n,$$

a odavde, uzimajući $k = n$,

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n!} \geqslant \frac{\left(\sqrt[n]{n!}+n\right)^n}{n!}. \tag{14}$$

Kako je

$$(n+1)(n+2)\dots(n+n) = \frac{(2n)!}{n!},$$

iz (14) dobivamo

$$\frac{\left(\sqrt[n]{n!}+n\right)^n}{(n!)^2} \leqslant \frac{(2n)!}{(n!)^3}. \tag{15}$$

Sada ćemo pokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3} = 0. \tag{16}$$

Promatrajmo niz $\{x_n\}$ čiji je opći član

$$x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}.$$

Imamo,

$$x_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{[(n+1)!]^3} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^3(n+1)^3}, \quad \text{tj.}$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}. \tag{17}$$

Kako je $\dfrac{2(2n+1)}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{2}$ za $n \geqslant 7$ $(\Leftarrow 12 \leqslant (n-3)^2)$. Sada je za $n \geqslant 7$

$$x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} x_7,$$

odakle slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, tj. vrijedi (16). Sada je iz (15)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+\sqrt[n]{n!})^n}{(n!)^2} = 0.$$

Literatura

[1] Šefket Arslanagić, *Anwendungen bekannter Ungleichungen*, Wurzel (Yena), 12(1996), 261–270.

[2] Šefket Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] O. Bottema and others, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] D. S. Mitrinović, *Analitic Inequalities*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

O posljedicama Hadwiger–Finslerove nejednakosti

Predrag Lončar[1], *Varaždin*

Uvod

U ovom članku ocijenit ćemo površinu bilo kojeg trokuta ABC i odozgo i odozdo s izrazima $a^2+b^2+c^2$ i $ab+bc+ca$, (a, b i c su duljine stranica trokuta). Zbog toga moramo napraviti pripremu koja je i sadržaj ovog uvoda. Koristit ćemo već poznatu Hadwiger–Finslerovu nejednakost za nenegativne brojeve u, v i w,

$$uv+vw+wu \geqslant \sqrt{3uvw(u+v+w)}. \qquad (1)$$

Dokaz se nalazi u [1], napomena 3, str. 208, ili [2], primjer 6, str. 181.

Neka je s poluopseg trokuta ABC,

$$s=\frac{a+b+c}{2}. \qquad (2)$$

Stranice a, b i c zadovoljavaju nejednakosti trokuta

$$a<b+c, \quad b<c+a, \quad c<a+b,$$

ili ekvivalentno

$$a<s, \quad b<s, \quad c<s. \qquad (3)$$

Neka je P površina trokuta, R polumjer opisane i r polumjer upisane kružnice. Uvedimo još neke korisne oznake,

$$\begin{aligned} H &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}, \\ K &= ab+bc+ca, \\ Q &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \end{aligned}$$

Nenegativna veličina Q je mjera "neistostraničnosti" trokuta ABC a uveo ju je Gerretsen, [3].
Vrijedi

$$Q=2(2H-K).$$

Neka je

$$q=\sqrt{\frac{Q}{2}}.$$

[1] Autor je predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu, e-mail: ivan.loncar1@vz.htnet.hr

U daljem ćemo koristiti veličine s, q, a neki put H, K. Veze između njih dane su ovim relacijama

$$s^2 = \frac{H+K}{2}, \quad q^2 = 2H - K,$$

odnosno

$$H = \frac{2s^2 + q^2}{3}, \quad K = \frac{4s^2 - q^2}{3}. \tag{4}$$

S x, y i z označavamo $s-a$, $s-b$ odnosno $s-c$. Veličine x, y i z su zbog (3) pozitivni brojevi bez ikakvih uvjeta jer vrijedi

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{5}$$

Formule (5) omogućuju da jednakosti i nejednakosti s a, b i c svedemo na jednakosti i nejednakosti s pozitivnim brojevima x, y i z. Tako npr. vrijede relacije

$$\begin{aligned} K &= x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx), \\ H &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx, \\ K - H &= 2(xy + yz + zx), \\ q^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx). \end{aligned} \tag{6}$$

Lema 1. U trokutu vrijedi identitet

$$\frac{s}{3}(s^2 - q^2) = \frac{P^2}{s} + abc. \tag{7}$$

Dokaz. Iz Heronove formule za površinu trokuta

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

slijedi

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{s} + abc &= (s-a)(s-b)(s-c) + abc \\ &= s^3 - (a+b+c)s^2 + Ks \\ &= \frac{s}{3}(s^2 - q^2). \end{aligned}$$

Pritom smo koristili formulu (2) i drugu formulu iz (4).

Zadatak 1. Pokažite, uz pomoć formula $P = rs$ i $abc = 4RP$, da identitet (7) možemo pisati u obliku:

a)
$$K - H = 2r\,(4R + r) \tag{*}$$

ili, zbog relacije (6) u obliku

$$xy + yz + zx = r\,(4R + r);$$

b)
$$K = s^2 + r\,(4R + r), \quad \text{ili} \quad H = s^2 - r\,(4R + r);$$

c)
$$q^2 = s^2 - 3r(4R + r).$$

Odatle izvedite nejednakost u trokutu $s \geqslant 3\sqrt{3}r$.

Iz relacije (6) slijedi $H < K \leqslant 2H$, a iz identiteta (7) u lemi 1 slijedi $s > q$.

Lema 2. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$8P^2 \leq abcs.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Koristit ćemo nejednakost

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc,$$

koja se dobiva množenjem nejednakosti

$$\sqrt{(a+(b-c))\cdot(a-(b-c))} = \sqrt{a^2-(b-c)^2} \leqslant a,$$

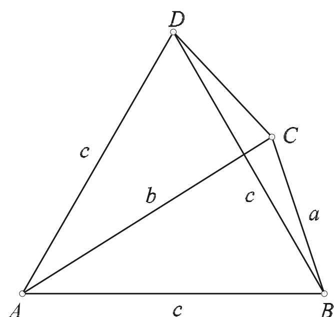
i još dviju dobivenih iz nje cikličkom zamjenom varijabla a, b i c. Sada dana nejednakost slijedi iz Heronove formule. Jednakosti vrijede ako i samo ako je $b = c$, $c = a$ i $a = b$, tj. ako i samo ako je $a = b = c$.

Teorem 1. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}P. \tag{8}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC konstruiramo jednakostranični trokut ABD tako da su C i D s iste strane pravca AB. Po kosinusovom poučku za trokute BCD i ABC imamo:



$$\begin{aligned}|CD|^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos(\beta - 60^\circ),\\ &= a^2 + c^2 - ac\cdot(\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta),\\ &= a^2 + c^2 - \frac{a^2+c^2-b^2}{2} - 2\sqrt{3}P,\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 2\sqrt{3}P \geqslant 0.\end{aligned}$$

Odavde slijedi tražena nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $C = D$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Posljedica 1. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geqslant \sqrt{3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Primjenom kosinusovog poučka i formule za površinu trokuta dobivamo

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha = 4P\operatorname{ctg}\alpha.$$

Napišemo li još dvije takve jednakosti za kutove β i γ i potom ih zbrojimo, dobijemo relaciju

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4P(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma).$$

Iz ove jednakosti i teorema 1 slijedi tražena nejednakost.

Poznati matematičari Hadwiger i Finsler su 1938. godine pomoću nejednakosti (1) poboljšali nejednakost (8).

Teorem 2. ([2], str.181) U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}P+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \tag{9}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Stavimo li u nejednakost (1) $u=x=\dfrac{-a+b+c}{2}$, $v=y=\dfrac{a-b+c}{2}$ i $w=z=\dfrac{a+b-c}{2}$, imamo

$$xy+yz+zx \geqslant \sqrt{3}P.$$

Koristeći relaciju (6), ovu nejednakost pišemo u obliku

$$K-H \geqslant 2\sqrt{3}P. \tag{**}$$

Uvrstimo li jednakost $2K=4H-Q$, koja je navedena na početku, imamo

$$2H \geqslant 4\sqrt{3}P+Q.$$

Posljedica 2. Nejednakost (9) je ekvivalentna nejednakosti

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}. \tag{10}$$

Dokaz. Imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Iz kosinusovog poučka za stranicu a i formule za površinu trokuta vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{2P}{bc}},$$

tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4P}.$$

Odavde imamo

$$a^2=(b-c)^2+4P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Zbrajanjem ove formule i još dviju njoj analognih, slijedi

$$K-H=2P(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}). \tag{11}$$

Iz dokaza teorema 2, nejednakost (9) je ekvivalentna s

$$K-H \geqslant 2\sqrt{3}P,$$

što zajedno s (11) daje (10).

Zadatak 2. Pokažite, koristeći relaciju (*), da je nejednakost (9) ekvivalentna s

$$s\sqrt{3} \leqslant 4R + r.$$

Potom pokažite, pomoću Eulerove nejednakosti, $R \geqslant 2r$, sljedeću nejednakost

$$a + b + c \leqslant 3\sqrt{3}R.$$

Zadatak 3. Pokažite da je nejednakost (9) ekvivalentna s nejednakošću

$$\sqrt{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leqslant 3 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Hadwiger je 1939. godine ocijenio odozgo izraz $a^2 + b^2 + c^2$ uz pomoć veličina P i Q.

Teorem 3. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4\sqrt{3}P + 3Q. \tag{12}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Zbog $Q = 2(2H - K)$, nejednakost (12) je ekvivalentna s

$$3K - 5H \leqslant 2\sqrt{3}P. \tag{13}$$

Primijetimo da je ova nejednakost netrivijalna samo ako je $3K - 5H > 0$. Pretpostavimo da vrijedi

$$3K - 5H > 0, \tag{14}$$

i izrazimo sve veličine u nejednakosti (13) pomoću x, y i z. Ona time postaje,

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \leqslant \sqrt{3}\sqrt{xyz(x + y + z)}, \tag{15}$$

uz pretpostavku (14) zapisanu kao

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) > 0. \tag{16}$$

Znamo da pretpostavka (16) osigurava postojanje trokuta s duljinama stranica $A = \sqrt{x}$, $B = \sqrt{y}$ i $C = \sqrt{z}$, i da je

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)} \tag{1}$$

njegova, po pretpostavci (16), površina. Nejednakost (15) možemo sada pisati kao nejednakost za trokut s duljinama stranica A, B, C i površinom F,

$$16F^2 \leqslant \sqrt{3}ABC\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{17}$$

Po lemi 2, primijenjenoj na trokut s duljinama stranica A, B i C, imamo

$$16F^2 \leqslant ABC(A + B + C). \tag{18}$$

Upotrebom nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine imamo

$$\frac{A + B + C}{3} \leqslant \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}},$$

odnosno

$$A + B + C \leqslant \sqrt{3}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{19}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = B = C$, tj. $a = b = c$. Iz nejednakosti (18) i (19) slijedi nejednakost (17). Time je (12) dokazano.

Iz teorema 2 i 3 slijedi

Posljedica 3. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$4\sqrt{3}P + Q \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4\sqrt{3}P + 3Q,$$

ili ekvivalentno,

$$K - H \geqslant 2\sqrt{3}P \geqslant 3K - 5H.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

S. Beatty je 1954. godine poboljšao nejednakost (12), odnosno (13).

Teorem 4. [4] U svakom trokutu vrijedi

$$(K - H)^2 \geqslant 12P^2 \geqslant (K - H)(3K - 5H). \tag{20}$$

Svaka od jednakosti vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Lijeva nejednakost u (20) odmah izlazi kvadriranjem nejednakosti (**), koja je ekvivalentna nejednakosti (9). Desna nejednakost u (20) je nova, tj. samo ako je ispunjeno $3K - 5H > 0$, netrivijalna samo ako je $s > 2q$. U tom slučaju ta je nejednakost jača od nejednakosti (13) jer je $K - H \geqslant 3K - 5H$.

Zadatak 4. Pokažite, da nejednakost (20) možemo zapisati ovako

$$(s^2 - q^2)^2 \geqslant 27P^2 \geqslant (s^2 - q^2)(s^2 - 4q^2). \tag{21}$$

Potom dokažite desnu nejednakost u (21) svodeći je pomoću (3) na nejednakost

$$xy(x - y)^2 + yz(y - z)^2 + zx(z - x)^2 \geqslant 0.$$

R. Frucht je 1957. godine poboljšao obje nejednakosti u (21). Ako su u trokutu zadani s i q, njegove ocjene su najbolje moguće, jer se može pokazati da daju minimum $s(s + q)^2(s - 2q)$ za P^2, odnosno maksimum $s(s - q)^2(s + 2q)$ za P^2, kada je P^2 zapisan pomoću s, q i još jednog parametra. Dokaz Fruchtove nejednakosti izvodi se pomoću zanimljivog identiteta u trokutu koji je naveden u sljedećoj lemi.

Lema 3. U svakom trokutu vrijedi identitet

$$\left[27P^2 - s^2(s^2 - 3q^2)\right]^2 = s^2\left[4q^6 - 27(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2\right]. \tag{22}$$

Dokaz. Koristeći identitet iz zadatka 1 c), ovaj identitet možemo zapisati kao poznatu Blundonovu jednakost.

$$4r^2\left[-s^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)s^2 - r(4R + r)^3\right] = (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2.$$

Da je dokažemo, koristimo sljedeće relacije (vidjeti relaciju u zadatku 1 b)),

$$a + b + c = 2s,\ K = s^2 + r(4R + r),\ abc = 4Rrs. \tag{23}$$

Pomoću Viètovih formula i relacija (23), vidimo da su a, b i c nultočke kubne jednadžbe

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrs = 0. \tag{24}$$

Jednadžbu (24) zamjenom $x = z + \dfrac{2s}{3}$ svodimo na oblik

$$z^3 - \frac{1}{3}\left[s^2 - 3r(4R + r)\right] z + \frac{2}{27}s\left[s^2 - 9r(2R - r)\right] = 0. \tag{25}$$

S jedne strane diskriminanta D kubne jednadžbe (24) odnosno (25) je

$$D = (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2. \tag{26}$$

S druge strane, koristeći koeficijente kubne jednadžbe (25), diskriminanta D je

$$D = \frac{4}{27}\{\left[s^2 - 3r(4R + r)\right]^3 - s^2(s^2 - 18Rr + 9r^2)^2\}. \tag{27}$$

Nakon pregrupiranja članova u izrazu (27) dobivamo poznati oblik diskriminante

$$D = 4r^2\left[4R(R - 2r)^3 - (s^2 + r^2 - 10Rr - 2R^2)^2\right]. \tag{28}$$

Iz relacija (28) i (26) slijedi identitet (22).

Teorem 5. [5] U svakom trokutu vrijedi

$$s(s + q)^2(s - 2q) \leqslant 27P^2 \leqslant s(s - q)^2(s + 2q). \tag{29}$$

Obje jednakosti vrijede ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Iz identiteta (22) u lemi 3 slijedi nejednakost

$$\left[27P^2 - s^2(s^2 - 3q^2)\right]^2 \leqslant 4s^2q^6.$$

Dobivamo

$$\left|27P^2 - s^2(s^2 - 3q^2)\right| \leqslant 2sq^3$$

Posljednja nejednakost ekvivalentna je nejednakosti (29). Obje vrijede ako i samo ako je

$$(s + q)^2(s - 2q) = (s - q)^2(s + 2q).$$

No, to je onda i samo onda kada je $q = 0$, tj. $Q = 0$, odnosno jedino u slučaju $a = b = c$.

Literatura

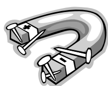
[1] Šefket Arslanagić, *Jedna algebarska nejednakost i njezina primjena*, Matematičko-fizički list 4/220, str. 207–212.

[2] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike 2*, HMD, Element, Zagreb 1994.

[3] J. C. H. Gerretsen, *Ongelijkheden in de driehoek*, Niew Tijdschr. Wiskunde 41(1953), 1–7.

[4] S. Beatty, *Upper and lower estimates for the area of a triangle*, Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 48, 1–5 (1954).

[5] R. Frucht, *Upper and lower bounds for the area of a triangle for whose sides two symmetric functions are known*, Can. J. Math. 9, 227–231 (1957).



Fizika kao filozofski problem

Tihomir Vukelja[1], *Zagreb*

Uvod

Premda su rezultati i narav fizike danas zanimljiv filozofski problem, nije uvijek bilo tako. Fizika je tijekom 2000 godina od Aristotela do Galileija i Newtona bila naprosto grana filozofije, nastojanje da se prirodne pojave koje zapažamo u svakidašnjem iskustvu objasne na temelju filozofskih pretpostavki o naravi svijeta. U 17. stoljeću fizičari razvijaju novu metodu istraživanja: oslanjanje na instrumente, pokus i matematiku – i odvajaju se od filozofije. Tada je tako osamostaljena fizika postala predmet filozofskih promišljanja.

U kojem se smislu fizika pojavljuje kao filozofski problem? S jedne strane, fizika je ljudska djelatnost kroz koju nastojimo upoznati i objasniti ponašanje prirode, razumjeti svijet u kojem živimo. S druge strane, među temeljnim filozofskim problemima nalazimo pitanja poput "Što je svijet?" i "Što možemo uistinu znati o svijetu?" Oslonimo li se u traganju za odgovorom na ta pitanja, na rezultate fizike, ona poprimaju oblik "Što je svijet po fizici?" i "Čime možemo opravdati tvrdnju da je svijet uistinu onakav kakvim ga fizika prikazuje?".

Slika svijeta po Newtonovoj mehanici

Pitanje "Što je svijet po fizici?" je pitanje o tome što nam fizika kaže o svijetu, kakvu nam sliku svijeta nudi. Za ishodište takva razmatranja uzimamo neku fizičku teoriju te nastojimo oblikovati odgovarajuću predodžbu svijeta, odgovoriti na pitanja od čega je po toj teoriji svijet sazdan i kakva je narav tih njegovih sastavnica. Pitamo se, nadalje, je li takva slika svijeta zadovoljavajuća, vodi li ona možda do nekih neprihvatljivih zaključaka. Razmotrimo u osnovnim obrisima jedan primjer, sliku svijeta po Newtonovoj mehanici.

Newtonova je mehanika teorija koja opisuje i objašnjava gibanja tijelâ, a zamisli pomoću kojih to čini temelj su odgovarajuće slike svijeta. Prema toj slici se događaji u svijetu odvijaju na pozornici apsolutnog prostora i apsolutnog vremena ("apsolutnih" u smislu da posjeduju vlastiti nepromjenjivi ustroj i opstoje neovisno o tijelima i događajima), a koji su međusobno neovisni. "Glumci" koji nastupaju na toj pozornici su čestice zamišljene kao tvarne točke, beskonačno malena tijela koja u svakom trenutku

[1] Autor je viši asistent na Zavodu za povijest, filozofiju i socijologiju znanosti Fizičkoga odsjeka Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: tvukelja@phy.hr

posjeduju svojstva koja možemo mjeriti (poput mase, položaja ili brzine) i koja nam omogućuju da ih međusobno razlikujemo, pričem tijela konačnih dimenzija shvaćamo kao nakupine takvih čestica. Pretpostavljamo da ponašanje tijelâ i sustavâ tijelâ u cjelosti slijedi iz ponašanja čestica koje ih čine i da se sva njihova svojstva mogu svesti na svojstava tih dijelova. Isto vrijedi za svijet u cjelini: svijet je naprosto zbroj neovisno razumljivih dijelova. Razumijevanje cjeline svijeta slijedi iz razumijevanja njegovih dijelova i njihovih odnosa. Ti odnosi dijelova svijeta, tijelâ u svijetu, su međudjelovanja: tijela se mogu privlačiti ili odbijati, utjecati jedno na drugo bez dodira ili "na daljinu". Nadalje, jedine uloge koje ti svjetski glumci mogu igrati su gibanja kroz apsolutni prostor. Ta su gibanja jednoznačno određena međudjelovanjima, putem Newtonovih zakona gibanja. Stoga su svi budući događaji u svijetu posve predodređeni trenutnim stanjem stvari, odnosno položajima i brzinama tijelâ te njihovim međudjelovanjima, što nam omogućuje da ih pretkažemo. Čitav se svijet svodi na gibanja tvarnih točaka u apsolutnom prostoru i vremenu, jednoznačno određena međudjelovanjima i zakonima gibanja, i sve pojave u svijetu valja razumjeti na toj osnovi. Svijet mora biti takav da bi Newtonova mehanika davala ispravne rezultate.

Ta se teorija, kao što znamo, uistinu pokazala veoma uspješnom. No, s druge strane, opisana slika svijeta otvara mnoge filozofske probleme. Primjerice, Newtonova predodžba apsolutnog prostora i vremena podrazumijeva pojam *apsolutnog* gibanja, gibanja u odnosu na sam prostor. Takva su nam gibanja načelno nedohvatljiva; uvijek opažamo i opisujemo samo *relativna* gibanja, gibanja tijela u odnosu na neko drugo tijelo. Je li onda opravdano rabiti u fizici pojam apsolutnog prostora i vremena i tvrditi na temelju fizikalne teorije da su prostor i vrijeme uistinu apsolutni? Da li je fizici primjerenija predodžba *relacijskog* prostora i vremena, prema kojoj oni ne opstoje neovisno od tijela i događaja, već se smatraju skupovima mogućih odnosa među tijelima i događajima (nalik skupu rodbinskih odnosa, koji ne opstoje neovisno od ljudi koji čine obitelj)? Nadalje, u opisanoj se slici svijeta brzina tijela ne ograničava, zbog čega, primjerice, mogućnost razlikovanja tvarnih točaka postaje upitna. Treba li je stoga ograničiti, što nužno dovodi do povezivanja prostora i vremena? Kako razumjeti međudjelovanje na daljinu, uzajamni utjecaj tijelâ bez dodira ili posrednika? Može li se svaki sustav, čak i živo biće, smatrati naprosto zbrojem svojih dijelova? Možemo li na temelju pretkazivosti nekih događaja zaključiti da je svijet posve predodređen? Ako je uistinu tako, što je s ljudskom slobodom i odgovornošću?

Fizičke teorije kao nagađanja o svijetu

Sljedeće filozofsko pitanje koje nam se nameće jest kako opravdati tvrdnju da je opisana slika svijeta ispravna i da se fizičke teorije općenito mogu smatrati pravim znanjem o svijetu? U čemu je posebnost ili "tajna" fizike? Što se našeg primjera tiče, stožer ocrtane slike svijeta je Newtonov zakon gibanja, ona sadrži pretpostavke o svijetu nužne za uspostavu tog zakona. Ako je taj zakon valjan, onda s priličnim pouzdanjem možemo reći barem da smo na pravom putu. Stoga se moramo upitati kako znamo da je Newtonov zakon gibanja valjan.

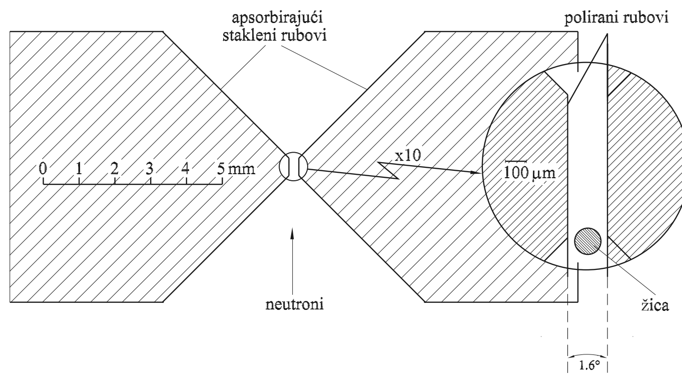
Uobičajen odgovor na gornje pitanje je da se naše pouzdanje u taj zakon temelji na iskustvu, na opažanjima, mjerenjima i pokusima. Njegova je valjanost potvrđena na mnoštvu različitih primjera, od gibanja planeta do padanja kamena. To pokazuje da je zakon ispravan, a time u biti i opisana slika svijeta. No takav odgovor nije posve zadovoljavajući. Prije svega, znamo da postoje gibanja koja se ne mogu podvesti pod taj zakon, poput gibanja planeta Merkura ili atomskih predmeta (atoma, neutrona i sl.).

Ti slučajevi zahtijevaju primjenu drukčijih zakona gibanja, razvijenih u okviru teorije relativnosti i kvantne mehanike. No te teorije upućuju na slike svijeta poprilično drukčije od one opisane i stoga ona naprosto ne može biti valjana.

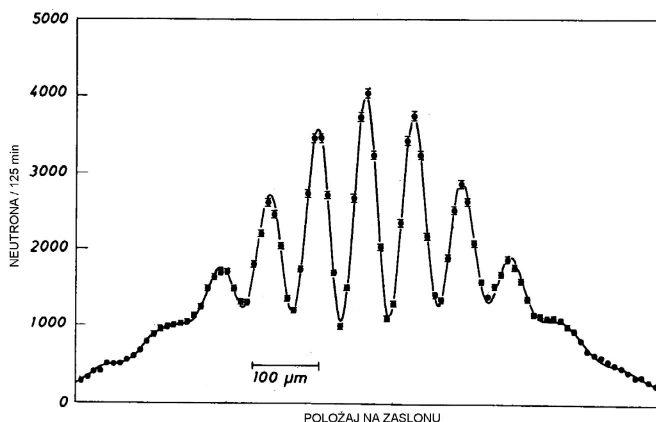
No ponuđeni odgovor ne bi bio valjano rješenje postavljenog problema čak i da ne poznajemo protuprimjere za Newtonov zakon. Taj je zakon, naime, po svojoj naravi *univerzalna* tvrdnja, tvrdnja koja se odnosi na sva gibanja svih tijela u svim okolnostima, drugim riječima, na beskonačno mnogo situacija. S druge strane, naše je iskustvo nužno ograničeno: niti je zakon iskušan na svim gibanjima, niti je to izvedivo. No iz ograničenog skupa istinitih opisa opažanja (primjerice, "opaženi labud L_1 je bijel", "opaženi labud L_2 je bijel", ... , "opaženi labud L_n je bijel"), koja su u skladu s nekom univerzalnom tvrdnjom ("svi su labudovi bijeli"), nije moguće logički strogo izvesti istinitost te univerzalne tvrdnje (jer je posve moguće da postoje i labudovi drugih boja, koje još nismo opazili; uistinu, iz Australije potječe crni labud, *Cygnus atratus*). Uopćenja potkrijepljena ograničenim skupom činjenica ne smijemo smatrati istinitim tvrdnjama, već tek *nagađanjima*, jer ne postoje jasna mjerila koja bi nam omogućila da opravdana uopćenja razlikujemo od neopravdanih. Imamo li to na umu, moramo se pomiriti s time da Newtonov zakon gibanja, kao i svi drugi fizički zakoni i teorije, ostaje, unatoč opsežnoj iskustvenoj potpori, tek pretpostavka, nagađanje koje se na temelju iskustva ne može jednom zauvijek potvrditi kao istinito i za koje možemo reći tek da je u nekim granicama i za neko vrijeme potkrijepljeno iskustvom.

Dovodi li uvid da su fizičke teorije tek nagađanja o funkcioniranju prirode u pitanje ugled fizike kao puta do spoznaje svijeta? Ne nužno. Mnogi filozofi smatraju da su unatoč tome fizičke teorije najbolje znanje o svijetu koje su ljudi svojim razumom i iskustvom u stanju dohvatiti. Posebnost tih teorija je, tvrdio je primjerice filozof Karl Popper, u tome što smo pomoću njih u stanju precizno pretkazati ponašanje stvari. Newtonov zakon gibanja nam vrlo jasno kaže kako bi se neko tijelo trebalo gibati u zadanim okolnostima. Ako iskustvo pokaže da se stvarno gibanje tijela razlikuje od tog pretkazanja, poput gibanja planeta Merkura, to znači da je naše pretkazanje *opovrgnuto*, iskustveno je dokazana njegova neistinitost, a time i neistinitost univerzalnog zakona iz kojeg smo ga izveli. Posebnost fizičkih zakona kao nagađanja je, po Popperu, u tome što se pozivanjem na iskustvo može jednom zauvijek ustanoviti njihova *neistinitost*, a fizika, kao put do spoznaje, je posebna po tome što bez milosti odbacuje teorije koje su se pokazale neistinitim i na njihovo mjesto stavlja nove teorije, nova nagađanja, bolje prilagođena zbilji. Tajna fizike, kao pravoga puta do spoznaje svijeta, je u njezinoj nemilosrdnoj samokritičnosti, a ne u tobožnjoj utemeljenosti teorija na činjenicama; u fizici ne težimo apsolutnoj istini i sigurnosti, već napretku i poboljšanju našega razumijevanja svijeta. Premda se za fizičku sliku svijeta ne može reći da je konačna istina, može se reći da fizika stalno napreduje kroz odbacivanje opovrgnutih pretpostavki i njihovo nadomještanje novim, obuhvatnijim i zbilji primjerenijim pretpostavkama, i time se neprestano približava istini.

Razmotrimo jedan primjer opovrgavanja Newtonova zakona gibanja, koji ima dalekosežne posljedice po fizičku sliku svijeta[2]. Neutroni prolaze kroz pukotinu u koju je umetnuta žica (slika 1) i detektiraju se na zaslonu iza pukotine. Pretpostavljamo da između pukotine i zaslona na neutrone ne djeluje nikakva sila. Izbrojimo li detekcije neutrona u svakoj pojedinoj točki zaslona vidimo da raspodjela broja detekcija po zaslonu slijedi *interferentni* obrazac (slika 2). No iz pretpostavke da se neutroni gibaju u skladu s Newtonovim zakonom gibanja slijedi *zvonolika* raspodjela detekcija i stoga moramo zaključiti da je u ovom slučaju taj zakon opovrgnut.



Slika 1.



Slika 2.

Za ispravno teorijsko reproduciranje i pretkazivanje rezultata pokusa izvedenih s atomskim predmetima, poput ovog upravo opisanog, morala je biti razvijena nova teorija gibanja – kvantna mehanika (na slici 2 točke prikazuju mjerene vrijednosti, a puna linija

[2] A. Zeilinger, R. Gähler, C. G. Shull, W. Treimer i W. Mampe, *Single– and double–slit diffraction of neutrons*, Reviews of Modern Physics, **60** (1988) 1067 – 1073. Slike 1 i 2 su preuzete iz tog članka.

kvantnomehaničko pretkazanje). No u okviru te teorije se gibanje atomskih predmeta ne opisuje putanjom kroz fizički prostor, već "valnom funkcijom" u apstraktnom "konfiguracijskom" prostoru, koja, u gornjem slučaju, određuje vjerojatnost da neutron bude detektiran u nekoj točki zaslona. Takva narav zakona gibanja atomskih predmeta ima za posljedicu da se slika svijeta po kvantnoj mehanici korjenito razlikuje od one prije opisane. Premda u toj novoj slici svijeta pozornicu na kojoj se odvijaju događaji i dalje čine apsolutni prostor i vrijeme, glumci koji na njoj nastupaju, atomski predmeti, su posve drukčije naravi. To nisu stvarne točke, već posve nepredočiva bića, a opazivi pojedinačni događaji u takvu svijetu, poput detekcije neutrona na zaslonu, nisu predodređeni, već slučajni – ništa ne određuje jednoznačno u kojoj će točki zaslona neki neutron biti detektiran.

Fundamentalni problem te slike svijeta jest kako iz tako shvaćena "mikrosvijeta" izrasta "makrosvijet" našeg svakidašnjeg iskustva? Zašto se izravno opaziva tijela ponašaju drukčije od atoma od kojih su po pretpostavci sazdana, zašto nikad ne opažamo njihovo "kvantnomehaničko" ponašanje? Kako je moguće da atomi, koji po kvantnoj mehanici ne slijede određene putanje kroz prostor, čine tijela koja slijede takve putanje, kako je moguće da se slučajna događanja iz mikrosvijeta slože u predodređene događaje makrosvijeta? Među fizičarima danas nema jednodušnosti glede rješenja tog problema i on jasno pokazuje da nešto nije u redu ili s uobičajenom kvantnomehaničkom slikom svijeta ili s našim svakidašnjim iskustvom svijeta ili s našim shvaćanjem kvantne mehanike.

Opovrgava li uistinu gibanje atomskih predmeta Newtonov zakon?

Na jedan mogući izlaz iz tog problema ukazuje potanje razmatranje pitanja je li Newtonov zakon gibanja uistinu opovrgnut rezultatima opisanog pokusa s neutronima i drugih pokusa s atomskim predmetima. Naime, nije uvijek lako nedvosmisleno opovrgnuti neku fizičku pretpostavku pozivanjem na iskustvo, imamo li na umu činjenicu da je u fizička objašnjenja ishoda pokusa nužno uključeno mnoštvo pretpostavki i da često nije jasno na koju od njih valja svaliti krivnju kad se teorijska očekivanja ne poklope s opažanjima.

Zgodan primjer iz povijesti fizike je otkriće planeta Neptuna. Motrenja gibanja Urana u 19. st. su pokazala da njegova putanja znatno odstupa od one koju predviđa Newtonov zakon gibanja. To se iskustvo moglo tumačiti kao opovrgavanje tog zakona, ali to nije bilo jedino moguće objašnjenje. Moglo se umjesto toga pretpostaviti da zakon gravitacije nije valjan ili da optički zakoni koji ravnaju opažanjima nisu valjani (lom svjetlosti u lećama teleskopa i u atmosferi) ili da u računu nisu uzete u obzir sve sile koje djeluju na Uran itd. Kao pokušaj prevladavanja tih problema pretpostavljeno je postojanje dotad neopaženog planeta u blizini Urana, gravitacijski utjecaj kojeg bi trebao biti odgovoran za opažena odstupanja putanje. Položaj tog planeta je izračunat na temelju odstupanja Uranove putanje i Newtonove teorije, a teleskopsko opažanje je potvrdilo postojanje planeta, na tom mjestu, kojeg danas nazivamo Neptunom. Tako je ta epizoda od mogućeg opovrgavanja Newtonova zakona gibanja postala njegov veliki uspjeh.

Kakve posljedice ima taj uvid po našu raspravu o gibanju neutrona? Interferentnu raspodjelu detekcija neutrona smo protumačili kao bjelodano opovrgavanje Newtonova zakona gibanja, jer bi po njemu neutroni koji se slobodno gibaju morali dati zvonoliku raspodjelu detekcija. No valjanost Newtonova zakona gibanja možemo očuvati tako da promijenimo neku drugu pretpostavku u tumačenju eksperimentalne situacije. Primjerice,

u opisu pokusa smo pretpostavili da se u prostoru između pukotina i zaslona neutroni gibaju slobodno, jer tu na njih ne djeluje nikakva sila poznata klasičnoj fizici. Pretpostavimo li pak da na neutrone tu zapravo djeluje neka sila zbog koje se oni gibaju, u skladu s Newtonovim zakonom gibanja, upravo tako da daju interferentnu raspodjelu detekcija, možemo spasiti taj zakon od opovrgavanja. Štoviše, fizičar David Bohm je pokazao da je takvu silu moguće strogo definirati i za svaki konkretan slučaj izvesti iz odgovarajuće kvantnomehaničke valne funkcije. Po njemu je standardna, općenito prihvaćena kvantna mehanika tek dio priče o atomskom svijetu, dio koji smo krivo protumačili kao potpun prikaz tog svijeta.

Ta nas pretpostavka vodi na posve drukčiju predodžbu atomskog svijeta, mnogo sličniju onoj izvedenoj iz Newtonove mehanike. U okviru te slike se atomski predmeti ne shvaćaju kao nepredočiva bića, već kao obične čestice koje se deterministički gibaju po određenim putanjama, u skladu s Newtonovim zakonom gibanja, a pod utjecajem klasičnih sila i jedne neklasične, "kvantne" sile. Između svijeta atoma i svijeta našeg svakidašnjeg iskustva nema fundamentalne razlike, osim učinaka kvantne sile. No i u takvoj slici svijeta nailazimo na ozbiljne probleme, od kojih je najveći narav kvantne sile, koja ima neka veoma teško razumljiva i nepoželjna svojstva. Kako bilo da bilo, Newtonov zakon gibanja ne možemo mirne duše smatrati opovrgnutim na slučaju gibanja atomskih predmeta.

Za koju se sliku svijeta odlučiti?

Tragajući za slikom svijeta po kvantnoj mehanici našli smo se u neočekivanoj situaciji. Imamo pred sobom dvije teorije gibanja atomskih predmeta, u biti različite, premda sadrže neke zajedničke elemente. Obje su u stanju objasniti i pretkazati rezultate svih izvedenih pokusa s atomskim predmetima, ali na temeljito različite načine, i stoga upućuju na temeljito različite slike svijeta. Prema jednoj se atomski svijet korjenito razlikuje od svijeta svakidašnjeg iskustva, to je svijet slučajnih događaja i nepredočivih bića kojima vladaju kvantnomehanički zakoni, a iz kojeg, na nama još uvijek nejasan način, izranja predodređen i predočivi svijet makroskopskih tijela i događaja. Prema drugoj je atomni svijet u biti jako nalik svijetu svakidašnjeg iskustva, čine ga predočive čestice koje se gibaju u skladu s Newtonovim zakonom gibanja, a pod utjecajem tajnovite kvantne sile. Kako se u takvoj situaciji odlučiti, na temelju čega možemo reći koja je od tih slika ispravna ili barem bliža zbiljskom stanju stvari u svijetu atoma?

Očigledno se ne možemo odlučiti na temelju iskustva, jer obje slike, barem koliko danas znamo, jednako dobro pretkazuju rezultate svih pokusa. Neki filozofi smatraju da pri odlučivanju u takvim situacijama važnu ili čak odlučujuću ulogu igraju fizici izvanjski čimbenici, poput filozofskih i estetskih sklonosti, ustroja znanstvene zajednice, pa čak i političkih uvjerenja i društvenoga statusa: fizičari se u pravilu ne mogu racionalno, tj. na temelju iskustva, opredijeliti za neku od raspoloživih alternativa te se stoga povijest fizike može razumjeti jedino na temelju psiholoških i socioloških istraživanja znanstvene zajednice. Takva istraživanja uloge društvenih faktora u oblikovanju i prihvaćanju fizičkih teorija, koja u ekstremima vode na shvaćanje fizičke slike svijeta kao suvremenog mita kojeg fizičari svojim autoritetom nameću društvu, danas su prilično popularna u okviru sociologije znanosti.

Ogradimo li se od takvih pretjerivanja, moramo ipak priznati da još ne postoje neupitni razlozi koji bi nas nužno prisilili da prigrlimo jednu od ocrtanih alternativnih slika atomskog svijeta. Situaciju dodatno usložnjavaju drukčiji stavovi o naravi kvantne mehanike, poput onih Nielsa Bohra i Alberta Einsteina. Obojica su, iz različitih

razloga, tvrdili da nije opravdano utemeljiti sliku svijeta na toj teoriji. Po Bohru kvantna mehanika uopće ne opisuje ponašanje samih atomskih predmeta, već ponašanje nerazdruživih cjelina koje oni u pokusima čine s mjernim uređajima u koje su uronjeni, što je istodobno krajnja granica naših mogućnosti prodora u atomski svijet. Po njemu je makroskopski svijet valjano opisan klasičnom fizikom, dok se kvantna fizika ne odnosi na atomski svijet, već na "međusvijet" u kojem se susreću i stapaju atomski predmeti i mjerni uređaji. Stoga nije opravdano izvoditi iz kvantne mehanike zaključke o naravi atomskoga svijeta. Einstein je pak smatrao da se tu radi o pomoćnoj, privremenoj teoriji, koja statistički opisuje ponašanje mnoštva atomskih predmeta, a ne ponašanje jednog jedinog (stoga iz nje ne smijemo izvoditi zaključke o naravi pojedinačnih atomskih predmeta) te da fizika tek treba razviti takvu teoriju.

Nakon stotinjak godina razvoja kvantne teorije još uvijek nema jednodušnosti o tome na kakvu nas sliku svijeta navodi suvremena fizika. U takvoj je situaciji korisno svratiti pogled na povijest fizike i uočiti da su prilike, unatoč nekim važnim razlikama, ipak poprilično nalik onima u ranim danima obnovljenoga sukoba Ptolemejeve geocentrične i Kopernikove heliocentrične slike svijeta u drugoj polovici 16. stoljeća. Tadašnji su astronomi raspolagali s dva geometrijska modela svemira (kojima se uskoro pridružio i treći, onaj Bracheov), koji su se podjednako dobro slagali s rezultatima motrenja i koji su dijelili mnoštvo teorijskih pretpostavki, a koji su, s druge strane, upućivali na korjenito različite slike svijeta. Premda se astronomi u to vrijeme uistinu nisu mogli "racionalno", tj. na temelju čvrstih argumenata, opredijeliti za neku od raspoloživih alternativa (a ipak se općenito jesu opredjeljivali), danas pouzdano znamo da se Zemlja vrti oko Sunca, a ne obratno. A taj nas primjer, kao i suvremena filozofska promišljanja, uči upravo tome da se kroz instrumente i pokuse zbilja svijeta naposljetku probija u fizičku sliku svijeta i odlučujuće je oblikuje i pročišćuje, ma koliko se u toj slici možda zrcalila naša preduvjerenja, sklonosti i društvene metafore; da je razvoj fizike uistinu napredak u razumijevanju zbilje, a ne tek niz po dogovoru prihvaćenih bajki o svijetu neovisnih o zbilji, te da je fizika u stanju unutar sebe naći sredstva za razrješenje opisane dvojbe, premda će ono očigledno zahtijevati dodatne teorijske i eksperimentalne napore iz kojih mogu uslijediti velika iznenađenja.

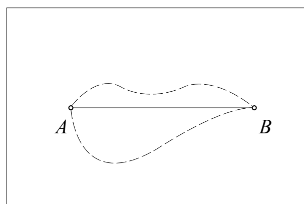
⋆⋆⋆



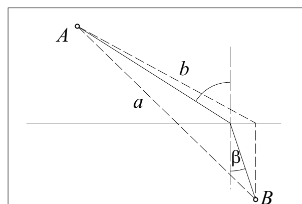
Optika iz Fermatove perspektive

Milivoj Uroić[1], *Zagreb*

Učeći geometrijsku optiku u školi, susrećemo zakon refleksije i loma, jednadžbe prizme i leće, te razne optičke sustave, teleskope, mikroskope, kamere, naočale i ljudsko oko. Namjera ovog teksta je jednostavna i lako razumljiva svakom matematičaru i fizičaru: pokazati da se svi sustavi geometrijske optike daju prikazati dosljednom primjenom *jednog jednostavnog pravila – Fermatovog principa.* Prije iznošenja samog principa, pogledajmo jedan primjer. Odabrao sam najjednostavniji, toliko jasan da ga često uzimamo zdravo za gotovo, niti ne navodeći ga kao posebnu zakonitost – pravocrtno širenje svjetlosti u jednolikom mediju (npr. u zraku).



Slika 1.



Slika 2.

Na slici 1 prikazane su točke A i B. Ako zraka svjetlosti putuje kroz obje točke, Fermatov princip (i zdrav razum) nam govori da će proći po dužini $\overline{AB}$. Zašto ne po iscrtkanim krivuljama, ili po bilo kojem drugom putu između A i B? Od brojnih svojstava dužine, tj. odsječka pravca, za ovo razmatranje bitno je sljedeće: to je *najbrži* put iz A u B. Pravocrtno rasprostiranje svjetlosti nam je tako očigledno da se pomoću njega snalazimo u prostoru, određujemo kada je nešto između nas i objekta promatranja, nišanimo, procjenjujemo kvalitetu ravnih predmeta, a kada se kojim slučajem svjetlost *ne* kreće pravocrtno, govorimo o lomu, refleksiji, optičkoj varci... No, evo konačno poopćenja pravocrtnog širenja, *Fermatovog principa*:

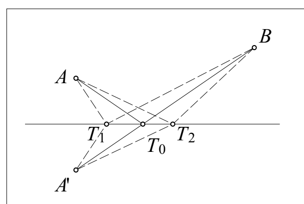
> Zraka svjetlosti koja prolazi kroz dvije točke (A i B), između tih točaka će proći najbržim mogućim putem.

Francuski matematičar Pierre de Fermat (1601. – 1665.) poznatiji je po jednom svom matematičkom teoremu (Fermat's last theorem), no bavio se intenzivno i problemima minimuma i maksimuma, te je svojim publikacijama bitno pridonio razvoju matematičke analize. I ovdje izloženi princip je dio njegovog rada na području traženja ekstremnih (minimalnih i maksimalnih) vrijednosti.

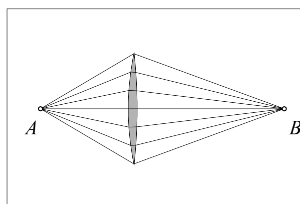
Sljedeći primjer je pogodan za ilustraciju Fermatovog principa – lom svjetlosti. Želimo odrediti put zrake svjetlosti kroz točke A i B na slici 2. Točka B je u optički gustom sredstvu, npr. vodi, a vodoravna crta je granica zraka i vode. Poznato je da je brzina svjetlosti u vodi n puta manja od brzine u zraku (vakuumu), gdje je n *indeks*

[1] Autor je viši asistent na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Bavi se procesima u unutarnjim ljuskama atoma, te nuklearnom fizikom; e-mail: muroic@phy.hr

loma vode. Ako je u oba sredstva brzina manja od brzine u vakuumu, govorimo o *relativnom* indeksu loma, koji je jednak omjeru tih dviju brzina. Koji je put najbrži? Najkraći je očigledno direktan put (a), ali njegov veliki dio prolazi kroz vodu, gdje je brzina manja. Najkraći put kroz vodu je varijanta (b), ali ona bitno produljuje put kroz zrak. Najbrži put je negdje između (puna linija), kompromis između što kraćeg puta kroz vodu i što kraćeg ukupnog puta. Može se pokazati, što i preporučam zainteresiranom čitatelju, da je najbrži onaj put za koji vrijedi *Snellov zakon loma*, tj. kod kojeg za upadni kut α i lomljeni kut β, označene na slici, vrijedi $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Za izvod nije nužno poznavanje derivacija (dovoljno je odrediti minimum kvadratne funkcije), ali je potrebna trigonometrija pravokutnog trokuta. Rješenje je ujedno i odgovor na nešto manje apstraktan problem: Nalazite se na plaži u točki A i osoba se utapa u moru u točki B. Trčite n puta brže nego što plivate. Kojim ćete putem najbrže doći do utopljenika? Horizontalna crta je linija obale. Problem je, naravno, čisto teorijske prirode. Ako se netko utapa, nećete ništa računati...



Slika 3.



Slika 4.

Refleksija svjetlosti od glatke površine, zrcala, zaslužuje novu skicu, razmatranje i komentar. Od zraka na slici 3 koje kreću iz A, reflektiraju se od zrcala (horizontalna crta) i dolaze u B, stvarni put zrake bit će onaj najbrži, a ovdje ujedno i najkraći. Nije se teško uvjeriti da je to onaj put za koji vrijedi *zakon refleksije*, takav da je upadni kut jednak reflektiranom. Promotrimo točku A', koju zovemo *slika* od A, simetričnu u odnosu na ravninu zrcala. Lako se vidi da je za svaki odabir točke T na zrcalu put ATB jednak putu $A'TB$, što znači da će stvarna točka refleksije T_0 ležati na dužini $\overline{A'B}$, što povlači jednakost spomenutih kutova.

Ali, zar nije brži put *dužina* $\overline{AB}$? Opažač u točki B će vidjeti *dvije* zrake iz A, jednu direktno, a drugu reflektiranu u zrcalu iz smjera A'. Prvi je put globalno najbrži, a drugi je najbrži od onih koji dolaze do zrcala. Dakle, pojam "najbrži" u Fermatovom principu ne znači nužno globalno, apsolutno najbrži, već *brži od svih bliskih puteva*.

Netko će se pobuniti: Zašto bi zraka iz A uopće morala stići u točku B? Zraka koja krene prema T_1 ili T_2 to očito neće učiniti. Fermatov princip ne govori o tome kuda će prolaziti i kamo će stići zraka koja krene iz A nekim smjerom, već kojim je putem prošla *ako* je stigla u neku točku (B).

Fokusiranje

Slika 4 je tipična ilustracija upotrebe sabirne leće u optici: snop zračenja izlazi iz točke A, prolazi kroz leću i fokusira se (ponovno sabire, konvergira) u točki B. Pogledajmo ju imajući na umu Fermatov princip. Zar ne bi samo jedna zraka trebala prolaziti najbržim putem? A zrake prolaze *svim* putevima kroz leću (nacrtano ih je

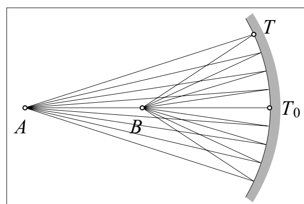
samo nekoliko). Ako želimo postići fokusiranje na slici, a da putevi zraka zadovoljavaju Fermatov princip, *svi* bi trebali biti najbrži, ili kao logična posljedica:

> Da bismo snop zraka koje izlaze iz točke A fokusirali u točku B, moramo postići da svi putevi iz A u B budu jednako brzi.

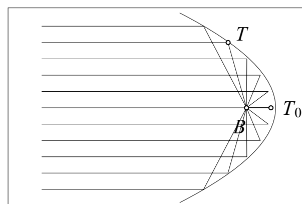
Ako pogledate različite nacrtane puteve na slici 4, vidjet ćete kako "radi' sabirna leća: najkraći, ravan put prolazi najdebljim slojem leće. Kako je brzina svjetlosti u leći n puta manja nego u zraku, to produžuje vrijeme puta do B. Zraka koja krene prema rubu leće prolazi kroz vrlo malu debljinu leće, ali prolazi geometrijski najduljim putem. Te zrake, kao i sve između njih, trebaju *jednako* vremena za put iz A u B. Ova je tvrdnja egzaktan uvjet fokusiranja, dok je jednadžba leće koja se koristi u srednjoškolskoj fizici aproksimacija koja vrijedi za tanke leće sa sfernim graničnim plohama (dioptrima) i za indeks loma stalnog iznosa tj. neovisnog o boji svjetlosti. Uz navedene aproksimacije jednadžba leće se može izvesti neposredno Fermatovim principom, ili posredno iz Snellovog zakona loma svjetlosti. Njen matematički oblik je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

gdje je a udaljenost od A do leće, b udaljenost od leće do B, n indeks loma materijala leće u odnosu na okolinu, te R_1 i R_2 radijusi sfernih dioptara leće, uz pozitivne predznake za bikonveksnu leću kao na slici 4.



Slika 5.



Slika 6.

Umjesto leće, koja je računski vrlo zahtjevna, želi li se dobiti egzaktan oblik, odredit ćemo oblik *zrcala* potrebnog za fokusiranje. Odgovarajući hod zraka sa zrcalom umjesto leće prikazuje slika 5. S obzirom na prethodni zaključak o fokusiranju, trebamo se zapitati: Kojeg je oblika ploha (na slici je njen presjek, krivulja), takva da svi putevi iz A u B budu jednako brzi? S obzirom da je sada brzina svjetlosti svugdje jednaka, pitanje se svodi na jednakost prijeđenih puteva. Ili, još preciznije formulirano: koje je geometrijsko mjesto točaka T za koje je zbroj udaljenosti $|AT|$ i $|BT|$ konstantan? Rješenje ovog problema je *elipsa*, s točkama A i B kao *fokusima* ili *žarištima*. Odnosno, prostorna ploha koja opisuje naše zrcalo je *rotacijski elipsoid*. Elipsa se upravo i definira pomoću konstantne sume udaljenosti točke na krivulji od oba fokusa. Razmotrimo neke specijalne slučajeve ovog rješenja.

Aproksimacija elipsoida sferom – jednadžba sfernog zrcala

Ukoliko se ograničimo na zrake blizu optičke osi ABT_0, položaj predmeta, zrcala i slike možemo opisati približnom jednadžbom koja se uči u školi. Zrake bliske optičkoj osi znače da trebamo razmatrati samo manji dio plohe (presječne krivulje) oko tjemena. Tada elipsoid (elipsu) možemo zamijeniti sferom (kružnicom) jednakog radijusa zakrivljenosti. Radijus zakrivljenosti elipse u tjemenu može se izraziti kao $R = b_e^2/a_e$, gdje su a_e i b_e velika i mala poluos elipse (Matematički priručnik Bronštejn, str. 206). Poznavatelj svojstava krivulja drugog reda sjetit će se da vrijedi i $a_e^2 = b_e^2 + e^2$, gdje je e linearni ekscentricitet elipse. Udaljenosti predmeta i slike od tjemena ($|AT_0|$ i $|BT_0|$) obično se označavaju s a i b (zato indeksi e za poluosi elipse). Te se udaljenosti lagano izraze pomoću veličina karakterističnih za elipsu:

$$a = a_e + e, \quad b = a_e - e$$

Umnožak tih jednakosti daje

$$ab = (a_e + e)(a_e - e) = a_e^2 - e^2 = b_e^2,$$

a zbroj

$$a + b = (a_e + e) + (a_e - e) = 2a_e.$$

To su upravo veličine pomoću kojih je izražen radijus zakrivljenosti, pa vrijedi:

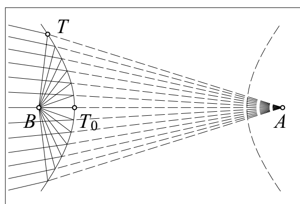
$$R = \frac{b_e^2}{a_e} = \frac{ab}{(a+b)/2}$$

Odatle sređivanjem izraza slijedi *jednadžba sfernog zrcala*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}.$$

Vrlo udaljen predmet ili slika

Vratimo se ponovno elipsi i zamislimo da želimo jedan od fokusa znatno udaljiti od drugog i nasuprotnog tjemena. Na slici 5 to bi značilo zadržati točke B i T_0, uz pomicanje točke A na veliku udaljenost. Koliko veliku? Budimo praktični, i zamislimo da je B prijemnik satelitske antene, T tjeme "tanjura" antene, a A *satelit*. Komunikacijski sateliti su vrlo daleko od antene u usporedbi s dimenzijama i udaljenostima same antene. Za beskonačno udaljenu točku A, snop zraka s nje će dolaziti paralelno (slika 6). Kojeg je oblika tanjur? Odgovor vjerojatno znate, to je *paraboloid* (presjek je parabola). Ako pitate matematičara zašto, priznat će vam da je, uz priličnu slobodu izražavanja, parabola ustvari elipsa kojoj je jedan fokus pobjegao u beskonačnost...



Slika 7.

Može li točka A "pobjeći" dalje od beskonačnosti? U optici može! Točka A je sjecište dolaznih zraka (slika 5). Nalazi se u beskonačnosti ako su dolazne zrake paralelne (slika 6). Ako zamislimo konvergentan dolazni snop, ne takav da dolazi *iz* točke A, nego takav da ide *prema* točki A, dobit ćemo situaciju kao na slici 7. Poznavaoci krivulja drugog reda pogodit će da je ovaj put rješenje *hiperboloid* (presjek je hiperbola), s fokusima B i A. Radi jasnoće, prikazana je refleksija zraka s jedne grane hiperbole, ali i druga predstavlja egzaktno rješenje. Iako ovdje nema fokusiranja zraka, Fermatov princip uvjetuje da će se u B fokusirati snop zraka koje bi došle istovremeno u A (crtkani produžeci), ili da snop iz B nakon refleksije izgleda kao da su zrake krenule istovremeno iz A.

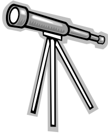
Mali matematički nusprodukt

S obzirom da smo zaključili da se zračenje emitirano u jednom žarištu elipse fokusira u drugom, ali znamo i da se u svakoj točki elipse svjetlost reflektira tako da je upadni kut jednak reflektiranom, iz obje tvrdnje zajedno slijedi jedno matematičko svojstvo elipse: Iz svake točke elipse, spojnice sa žarištima zatvaraju jednake kutove s tangentom (i normalom). Ista tvrdnja vrijedi i za hiperbolu, a zainteresirani čitatelj će ju lagano preinačiti u odgovarajuću tvrdnju za parabolu.

Još malo o Fermatovom principu

Čak i kada se, lakše ili teže, utvrdi da zakoni geometrijske optike slijede iz Fermatovog principa, ostaje nekoliko tema koja se nameću. Zakoni loma i refleksije vrlo dobro odgovaraju predodžbama o kretanju zraka baziranim na klasičnoj mehanici: uz određeni početni položaj i smjer kretanja, zrake imaju *deterministički* određen daljnji hod. Fermatov princip izražava zakone geometrijske optike na drukčiji, možda manje intuitivan način, jer naša je intuicija temeljena na klasičnoj mehanici. Pitanje koje bi si trebali postaviti analizirajući primjere upotrebe Fermatovog principa je – *kako zrake svjetlosti određuju koji je put najbrži?* U ovom tekstu korišteno je znanje o određivanju minimuma, o trigonometrijskim funkcijama, o krivuljama drugog reda. Svjetlost sigurno ne *zna* za te pojmove. Svjetlost je jedan od najjednostavnijih fenomena u prirodi, dok je ljudsko logično razmišljanje jedan od najsloženijih. Dakle mi koristimo npr. funkciju sinus kad određujemo hod lomljene zrake, ali svjetlost to sigurno "radi" na neki drugi način.

Odgovor je u *valnoj* prirodi svjetlosti. Fermatov princip može objasniti svu geometrijsku optiku, ali nije objašnjiv *unutar* geometrijske optike. O ovoj opsežnoj temi možda nekom drugom prilikom...



Tipične zablude o Velikom prasku

Dario Hrupec[1], *Koprivnica*

Uvod – Veliki prasak

Širenje svemira jedan je od najosnovnijih koncepata moderne znanosti, ali i jedan od najčešće krivo shvaćenih. Hubbleovim otkrićem da je brzina udaljavanja galaktika razmjerna njihovoj udaljenosti postalo je jasno da se svemir širi[2]. To je otkriće potaknulo nastanak teorije Velikog praska po kojoj je svemir nastao iz početnog stanja ogromne temperature i gustoće.

Teorija Velikog praska danas je najšire prihvaćena teorija nastanka i razvoja svemira. No izraz "veliki prasak" ne treba shvaćati doslovno. Veliki prasak nije bio poput bombe koja eksplodira u prethodno prazni prostor. Bila je to *eksplozija samog prostora*.

Strogo uzevši, teorija Velikog praska govori vrlo malo o samom prasku. Ona opisuje što se zbilo nakon njega. Ta je priča vrlo zanimljiva, no izvan je opsega ovog teksta[3].

Osim teorije Velikog praska, za razumijevanje svemira ključna je još jedna važna fizikalna teorija – Einsteinova teorija relativnosti. Posebna teorija relativnosti opisuje prostor i vrijeme, a opća tvar u prostor–vremenu, odnosno gravitaciju. Jedna od temeljnih postavki teorije relativnosti je konstantna brzina svjetlosti, a fascinantna posljedica te pretpostavke je činjenica da je brzina svjetlosti gornja granica brzine kojom se tvar može relativno gibati u prostoru.

Obje teorije temeljne su fizikalne teorije koje su danas za većinu astrofizičara i astronoma neupitne. No, kako su kozmološke udaljenosti i brzine bliske brzini svjetlosti daleko od zornih predodžba, u nekim nas slučajevima odgovori na prividno jednostavna pitanja mogu jako iznenaditi.

Mali test iz kozmologije

Evo sažetog popisa pitanja na koja ponekad čak i fizičari i astronomi daju krivi odgovor[4]:

1. Mogu li se galaktike udaljavati od nas brzinom većom od brzine svjetlosti?
   DA NE

[1] Autor je asistent u Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu, e-mail: dario.hrupec@irb.hr

[2] Pogledajte članak Krešimira Pavlovskog, *Hubbleov zakon i širenje svemira*, u prvom broju MFL-a godišta 2001./02.

[3] Zainteresirane čitatelje upućujemo na poznatu knjigu Stevena Weinberga, *Prve tri minute* (Izvori, Zagreb, 1998).

[4] Točni odgovori su: 1. DA 2. DA 3. NE 4. NE

2. Možemo li vidjeti galaktike koje se eventualno udaljavaju brže od svjetlosti?
   DA NE
3. Svemir je star oko 10 milijardi godina. Znači li to da je granica opažanja 10 milijardi svjetlosnih godina?
   DA NE
4. Šire li se i objekti unutar svemira?
   DA NE

Rasprava

1. Prvi je dojam – naravno NE. Einsteinova teorija relativnosti to zabranjuje. Međutim, točan odgovor je DA. Posebna teorija relativnosti zabranjuje da relativna brzina dvaju tijela **u prostoru** premaši brzinu svjetlosti c (ili ako su oba tijela materijalna, da dosegne c). Brzina kojom udaljene galaktike bježe od nas zapravo je brzina rastezanja **samog prostora** i posebna teorija relativnosti nema ništa s time. Relativno gibanje galaktika u prostoru određeno je gravitacijom, no za kozmološke udaljenosti dominira rastezanje prostora. Tek za relativno bliske galaktike (npr. unutar vlastitog skupa) gravitacija može prevladati. Npr. naša najbliža susjedna galaktika, Andromeda, ne udaljava se od nas nego putuje prema nama.
2. Prvi dojam – ponovo NE. Svjetlost iz takvih galaktika ne može nas doseći. No, točan je odgovor DA. Fotoni emitirani iz takvih galaktika početno nisu u stanju doći do nas. Ali, Hubbleova udaljenost nije stalna nego s vremenom raste i može obuhvatiti taj foton. Jednom kad se to dogodi, foton nam se približava i eventualno nas može doseći.
3. Brzopleti odgovor je DA. Fotoni iz najudaljenijeg kvazara starog skoro 10 milijardi godina putuje do nas 10 milijardi godina pa prevale put od 10 milijardi svjetlosnih godina. No, nije tako. Kako foton putuje, prostor kroz koji prolazi se rasteže, tako da prevali put koji je veći od 10 milijardi svjetlosnih godina. Račun pokazuje da je prevaljeni put približno tri puta veći. Tako je svjetlost iz najudaljenijeg kvazara zapravo prošla put od 30 milijardi svjetlosnih godina. To je ujedno današnja granica vidljivog svemira. I to nije sve. Drugi računi pokazuju da je polumjer zakrivljenosti svemira veći od 70 milijardi svjetlosnih godina. Tako je obujam vidljivog svemira manji od 10% ukupnog obujma svemira.
4. Pa, DA. Ako se sam prostor širi, širi se i sve u njemu. Ponovo krivo. Svemir raste, ali objekti unutar njega ne. Naš Sunčev sustav, naša galaktika, druge galaktike pa čak i cijeli lokalni skupovi galaktika, područja su u kojima gravitacija nadmašuje širenje i drži objekte na okupu.

Literatura

[1] C. H. LINEWEAVER I T. M. DAVIS, *Misconceptions about the Big Bang*, Scientific American, **292** (2005) 36–45.

[2] `http://www.astro.ucla.edu/~ wright/cosmology_faq.html`

Popunjavanje tablice

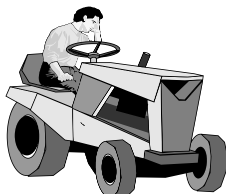
Pogledajte pažljivo tablicu s 28 polja u koju su već upisani neki brojevi. Vaš je zadatak da tu tablicu ispunite brojevima ali tako da je zbroj svaka tri susjedna broja, kako u recima tako i u stupcima, jednak 17.

			5			
						8
				6		
	3					

Kako to treba učiniti?

Oranje

Seljak treba preorati svoju njivu. On je planirao početi ujutro i završiti do 10 sati prije podne orući svaki sat 10 ari. Međutim, kad je završio polovinu posla, desi mu se kvar na traktoru i zbog toga je drugu polovinu njive morao orati brzinom od samo 5 ari na sat. Seljak je oranje završio točno u podne.



Kolika je veličina njive? Kad je seljak počeo orati? Koliko je sati orao prvu polovinu njive, a koliko drugu?

U znaku broja 4

Ovu glavolomku mogli bismo nazvati “problem četiri četvorke”, jer su u donjem računu dijeljenja od 40 znamenki poznate upravo takve četiri. Ipak, to je dovoljno da se uz malo truda i promišljanja ovaj račun rekonstruira. Da bi sve bilo u stilu postoje četiri rješenja!

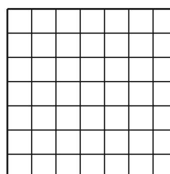
```
******4 : *** = *4**
 ***
 ----
  **4*
  ****
  -----
   ****
    *4*
    ----
    ****
    ****
    ----
       0
```

Možete li pronaći bar jedno od tih rješenja?

Na satu geometrije

Profesora Brodića u razredu je dočekala graja. Kad je on šutke počeo crtati na ploči kvadrat 7×7 i zatim pravokutnik 1×4, razred se primirio. Slijedilo je objašnjenje:

— Svi poznajete igru “potapanje brodova”. Igra je tako zanimljiva da je neki od vas igraju i za vrijeme mojih predavanja! Zato se nadam da ćete brzo odgovoriti na pitanje o najmanjem broju “hitaca” potrebnih da se u kvadratu 7×7 pogodi skriveni “brod” oblika pravokutnika 1×4.





Razred se sad potpuno umirio. Teško pitanje za učenike profesora Brodića! A za vas?

Jednakost

Branka se dugo mučila s donjom netočnom jednakošću u kojoj su na lijevoj strani neparne, a na desnoj parne znamenke. Na kraju je tražila pomoć starije sestre Snježane.

$$9\ 7\ 5\ 3\ 1 = 8\ 6\ 4\ 2\ 0$$

— Pomozi! U zadatku se traži da se između nekih brojki stave znakovi računskih operacija i postigne točna jednakost. I to samo s četiri znaka!

Snježana je dugo razmišljala. Na kraju je ipak našla rješenje. Koje?

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2006. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/224.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

2965.* a) Za koje prirodne brojeve n, broj $2n$ dijeli zbroj prvih n prirodnih brojeva?

b) Odredi prirodne brojeve n, ako takvi postoje, za koje $2n+1$ dijeli zbroj prvih n prirodnih brojeva.

2966.* Za članove niza nenegativnih racionalnih brojeva a_1, a_2, a_3, ... vrijedi $a_m + a_n = a_{mn}$, za svake $m, n \in \mathbf{N}$. Dokaži da među njima postoje barem dva jednaka broja.

2967. Riješi logaritamsku jednadžbu

$$\log_{x^2}(2+x) < \log_{x^2} x^2.$$

2968. Odredi broj nepraznih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ od kojih nikoji ne sadrži dva susjedna broja.

2969. U kružnicu k upisan je trokut ABC. Kružnica k_1 dodiruje kružnicu k i redom stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama B_1 i A_1. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i s njegov poluopseg, dokaži

$$|CA_1| = \frac{ab}{s}.$$

(Koristi identitet: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.)

2970. Neka su p i q polumjeri dviju kružnica kroz vrh A trokuta ABC koje dodiruju BC u točkama B i C. Dokaži da je $pq = R^2$, gdje je R polumjer tom trokutu opisane kružnice.

2971. Kružnica polumjera r upisana trokutu ABC dodiruje njegove stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u D, E i F. Tom trokutu su pripisane kružnice k_1, k_2 i k_3. Kružnica k_1 dodiruje BC, CA i AB u D_1, E_1 i F_1; kružnica K_2 dodiruje CA, AB i BC u D_2, E_2 i F_2; kružnica k_3 dodiruje AB, BC i CA u D_3, E_3 i F_3. Neka su P_0, P_i, $i = 1, 2, 3$ površine trokuta DEF, $D_iE_iF_i$, $i = 1, 2, 3$. Dokaži jednakost

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3}.$$

2972.* Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi koji zdovoljavaju uvjet

$$a + b + c \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Dokaži nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a + b + c.$$

2973. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dokaži da vrijedi

$$\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\ \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

2974. Ako polinom $P(x)$ stupnja n poprima cjelobrojne vrijednosti za $x \in \{k, k+1, \ldots, k+n\}$, gdje je k dani prirodni broj, dokaži da on poprima cjelobrojne vrijednosti za sve cijele brojeve x.

2975. Neka su x, a, b, c, d, e, f realni brojevi. Pokaži da je

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} \geq 0.$$

2976. Odredi funkcije $f, g, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sa svojstvom

$$(h \circ g \circ f)(x+y+z) + (g \circ f)(y+z) + f(z) = x + 2y + 3z.$$

2977. Dan je skup od $4n$ pozitivnih brojeva. Poznato je da se svaka četiri različita broja mogu poredati tako da budu članovi geometrijskog niza. Dokaži da u tom skupu ima barem n jednakih brojeva.

2978. Iz kutije u kojoj se nalazi n kuglica, na slučajan način izaberemo nekoliko njih. Kolika je vjerojatnost da je broj izabranih kuglica paran?

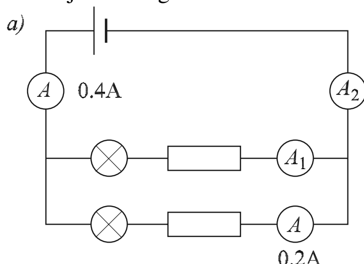
[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

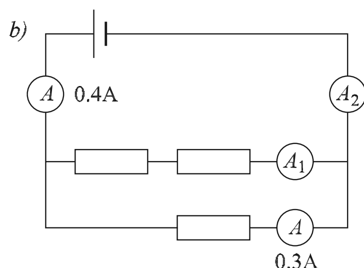
B) Zadaci iz fizike

OŠ – 238. U tvornici se proizvode sapuni u obliku kvadra dimenzija $9\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ gustoće $1.1\,\mathrm{g/cm^3}$. Kolika je najveća masa sapuna što se može složiti u kutiju dimenzija $54\,\mathrm{cm} \times 35\,\mathrm{cm} \times 36\,\mathrm{cm}$?

OŠ – 239. Tijekom normalnog govora zvučni val proizvodi tlak od $20\,\mathrm{mPa}$ na bubnjić u uhu. Kolika je sila na bubnjić ako je njegova površina $0.52\,\mathrm{cm^2}$? Ta sila se prenosi prema pužnici preko koščica koje djeluju kao poluga. Krak te "poluge" prema bubnjiću je 1.5 puta kraći nego prema pužnici. Kolika je sila koja djeluje na otvor pužnice? Površina otvora pužnice je $0.026\,\mathrm{cm^2}$. Koliki se tlak prenosi na tekućinu u pužnici?

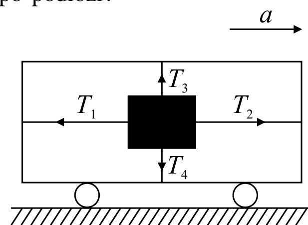
OŠ – 240. Karla je sastavila strujni krug kao na slici a), a Lea kao na slici b). Svaka od njih ima samo dva ampermetra pomoću kojih su očitale struje kao što je prikazano na slici. Kolike će vrijednosti struje očitati Karla i Lea nakon što premjeste ampermetre na mjesta A_1 i A_2 u strujnom krugu?





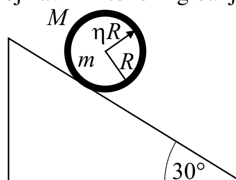
OŠ – 241. Matija vozi bicikl, a Andrija trči uz obalu Drave. U jednom trenutku su udaljeni $360\,\mathrm{m}$ i gibaju se jedan prema drugom. Matija se giba 3 puta većom brzinom od Andrije. Ako se susretnu za $1\,\mathrm{min}$, koliko će biti udaljeni za $3\,\mathrm{min}$? Kojom brzinom Matija vozi bicikl? Kojom brzinom Andrija trči?

1322. Tijelo je pomoću četiri niti vezano za kolica kao na slici. Sile zatezanja niti su T_1, T_2, T_3 i T_4. Kolikim ubrzanjem se kreću kolica po podlozi?

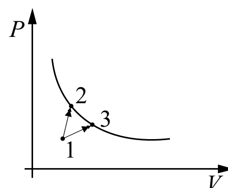


1323. Materijalna točka se giba po krugu polumjera $R = 4$ m brzinom koja se u vremenu mijenja po zakonu $v = A + Bt$, gdje je $A = 2$ m/s i $B = 1$ m/s^2. Naći tangencijalno, okomito i ukupno ubrzanje materijalne točke u trenutku kada ona opiše kut $\theta = \pi/4$.

1324. Bačva mase M napunjena naftom mase m kotrlja se niz kosinu kuta nagiba 30° (vidi sliku). Bačva se može smatrati šupljim valjkom s tankim bazama napravljenim od homogenog materijala. Vanjski polumjer šupljeg valjka je R, a unutarnji ηR $(\eta < 1)$. Odredite ubrzanje bačve. Trenje između zidova bačve i nafte je zanemarivo malo. Pretpostavite da se bačva kotrlja bez proklizavanja niz kosinu. Također os simetrije bačve je paralelna horizontalnoj ravnini tokom gibanja.



1325. Plin se zagrije iz istog početnog stanja, na načine prikazane na slici strelicama $1 \to 2$ i $1 \to 3$ do iste konačne temperature. Koji od ova dva procesa zahtijeva veću količinu topline?



1326. Relativistički proton kinetičke energije E sudara se elastično s protonom koji miruje. Nakon sudara protoni se razlete simetrično s obzirom na pravac gibanja prvog protona prije sudara. Odredite kut pod kojim su se rezletjeli protoni poslije sudara.

1327. Dva jednaka pločasta kondenzatora spojena su paralelno i nabijena nabojem $q = 40\,\mu\mathrm{C}$. U trenutku $t = 0$ udaljenost između ploča prvog kondenzatora jednoliko se povečava po zakonu $d_1 = d_0 + vt$, a udaljenost između ploča drugog se smanjuje po zakonu $d_2 = d_0 - vt$ pri čemu je $d_0 = 2$ mm, a $v = 0.1$ mm/s. Zanemarujući otpor spojnih žica naći jakost struje koja kroz njih protječe za vrijeme dok se ploče kondenzatora gibaju.

1328. U bajci o relativističkim metlama, tri vještice K, L i M ispituju svoje moći telepatskog određivanja pulsa. Veštica K miruje, dok se vještice L i M gibaju na relativističkim metlama konstantnim brzinama duž istog pravca. Vještica K kaže da je njen puls 75 otkucaja u minuti, a da puls vještice L iznosi 60 otkucaja u minuti. Vještica L tvrdi obrnuto, tj. da je njen puls 75 otkucaja u minuti, a da puls vještice K iznosi 60 otkucaja u minuti. Vještica M kaže da vještice K i L imaju jednak puls. Odredite brzine vještica L i M u odnosu na vješticu K, ako je poznato da se ni u bajkama vještice ne gibaju brže od svjetlosti.

C) Rješenja iz matematike

2937. *Nađi najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli* $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ *za* $k = 0, 1, 2 \cdots$

Rješenje. Za najmanju vrijednost k, $k = 0$ najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli izraz je:

$$11^2 + 12^1 = 133.$$

Sada preostaje dokazati da broj 133 dijeli izraz $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ za svaki k :

$$\begin{aligned} 11^{k+2} + 12^{2k+1} &= 121 \cdot 11^k + 12 \cdot 12^{2k} \\ &= (133 - 12) \cdot 11^k + 12 \cdot 12^{2k} \\ &= 133 \cdot 11^k + 12 \cdot (144^k - 11^k). \end{aligned}$$

Prvi pribrojnik zasigurno je djeljiv sa 133. Drugi pribrojnik je također djeljiv sa 133 zbog:

$144^k - 11^k = (144-11)\cdot(144^{k-1} + 144^{k-2}\cdot 11 + \cdots + 144 \cdot 11^{k-2} + 11^{k-1})$.

Ovim je dokazano da je najveći pozitivan cijeli broj koji dijeli početni izraz za svaki k, broj 133.

Goran Šeketa (2),
Gimnazija "Karlovac", Karlovac

2938. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10)2^x + 3 - x = 0$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $t = 2^x$. Sada jednadžba prelazi u kvadratnu, i to:

$$3t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0$$

Jednadžbu rješavamo po t.

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{9x^2 - 60x + 100 - 36 + 12x}}{6} \\ &= \frac{10 - 3x \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} \\ &= 10 - 3x \pm \sqrt{(3x-8)^2} \\ &= \frac{10 - 3x \pm (3x - 8)}{6}, \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = 3 - x.$$

1°

$$\begin{aligned} 2^{x_1} &= t_1, \\ 2^{x_1} &= \frac{1}{3}, \\ x_1 = \log_2 \frac{1}{3} &= -\log_2 3. \end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned} 2^{x_2} &= t_2, \\ 2^{x_2} &= 3 - x, \\ 2\left(2^{x_2 - 1} - 1\right) &= 1 - x. \end{aligned}$$

Za $x > 1$ lijeva strana jednadžbe veća je od 0, a desna manja od 0. Za $x < 1$ lijeva strana jednadžbe manja je od nule, a desna veća od 0. Jednakost nalazimo za $x_2 = 1$.

Rješenja glase:

$$x_1 = -\log_2 3, \qquad x_2 = 1.$$

Marko Čolić (2),
III. gimnazija, Osijek

2939. *Neka su* $1 \leqslant \alpha < \beta$ *realni brojevi. Dokaži da postoje cijeli brojevi* m, $n > 1$ *takvi da je* $\alpha < \sqrt[n]{m} < \beta$.

Rješenje. Tvrdnja koju treba dokazati ekvivalentna je tvrdnji da postoje cijeli brojevi m, $n > 1$ takvi da je $\alpha^n < m < \beta^n$. Dovoljno je pokazati da postoji n za koji je $\beta^n - \alpha^n > 1$. Vrijedi:

$$\beta^n - \alpha^n =$$
$$(\beta-\alpha)(\beta^{n-1}+\beta^{n-2}\alpha+\ldots+\beta\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1})$$
$$> \beta^{n-1}(\beta-\alpha)$$

Iz uvjeta zadatka je $\beta > 1$ pa je eksponencijalna funkcija $f(n) = \beta^{n-1}$ rastuća i nema gornje granice pa sigurno postoji prirodan broj n za koji je $\beta^{n-1}(\beta - \alpha) > 1$ pa stoga postoje brojevi m i n koji zadovoljavaju tvrdnju zadatka.

Antonio Krnjak (3),
Gimnazija "Čakovec", Čakovec

2940. *Neka je $n > 1$ cijeli broj. Dokaži da ne postoji iracionalan broj a takav da je*

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

racionalan broj.

Rješenje. Pretpostavimo da postoji iracionalan broj a takav da je

$$A = \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

racionalan broj.

Označimo s $\alpha = \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}$. Tada je $\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{1}{\alpha}$.

Tada je $a = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ racionalan broj

Pokazat ćemo da je $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n}$ racionalan za svaki prirodan broj.

Za $n = 2$ je

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = (1 + \frac{1}{\alpha})^2 - 2$$

racionalan.

Iz indentiteta

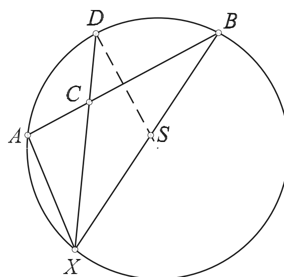
$$\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = \left(\alpha^{k-1} + \frac{1}{\alpha^{k-1}}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(\alpha^{k-2} + \frac{1}{\alpha^{k-2}}\right) \quad \text{za } k > 2,$$

matematičkom indukcijom slijedi da je $\alpha^k + \dfrac{1}{\alpha^k}$ racionalan broj za svaki prirodan broj k. Odavde slijedi da je $a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1} = 2a$ racionalan broj što je u suprotnosti s pretpostavkom. Time je dokaz završen.

Ur.

2941. *Dana je kružnica polumjera r i u njoj tetiva $\overline{AB}$ duljine c. Nađi točku X na kružnici tako da vrijedi $|AX| : |BX| = m : n$.*

Rješenje.



Neka je C točka koja dijeli tetivu $\overline{AB}$ u omjeru $m : n$, a D sjecište simetrale tetive $\overline{AB}$ s kružnicom kao na slici. Pravac CD siječe kružnicu još u točki X. Pokazat ćemo da je X tražena točka.

Kako je

$$\measuredangle AXD = \measuredangle BXD \quad \text{jer je} \quad |AD| = |BD|$$

Nadalje, XD je simetrala $\measuredangle AXB$ pa vrijedi:

$$|AX| : |BX| = |AC| : |BC| = m : n.$$

Analogno se nađe i druga točka X' na drugom luku $\overset{\frown}{AB}$.

Mirko Čorić (3),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

2942. *Ako su dani brojevi takvi da je $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, dokaži nejednakost*

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Rješenje. Iz $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, slijedi

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}$$
$$\leqslant \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}$$
$$+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} = \frac{x+z+y}{6+x^3+y^3+z^3}$$

I dovoljno je pokazati da je $3(x+y+z) \leqslant 6+x^3+y^3+z^3$.

Ovo posljednje slijedi iz $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t^3-3t+2 \geqslant 0$, zbog $t^3-3t+2=(t-1)^2(t+2)$.

Marko Čolić (2), Osijek

2943. *Ako su r, r_a, r_b, r_c polumjeri upisane i pripisanih kružnica trokuta, dokaži nejednakost*

$$\sqrt{r_a r_b}+\sqrt{r_b r_c}+\sqrt{r_c r_a} \geqslant 9r.$$

Rješenje. Znamo da vrijedi:

$$r_a=\frac{P}{s-a}, \quad r_b=\frac{P}{s-b}, \quad r_c=\frac{P}{s-c},$$
$$r=\frac{P}{s}.$$

Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(s-a)(s-c)}}+\frac{1}{\sqrt{(s-b)(s-c)}} \geqslant \frac{9}{s}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c})s \geqslant 9\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Uvodimo supstituciju:

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a),\ y=\frac{1}{2}(c+a-b),\ z=\frac{1}{2}(a+b-c),$$

tj.

$$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y.$$

Stoga nam preostaje dokazati:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z) \geqslant 9\sqrt{xyz}.$$

Kako je

$$\left.\begin{array}{lcl} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} & \overset{A-G}{\geqslant} & 3\sqrt[6]{xyz} \\ x+y+z & \overset{A-G}{\geqslant} & 3\sqrt[3]{xyz} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z) \geqslant 9\sqrt{xyz},$$

što je i trebalo dokazati.

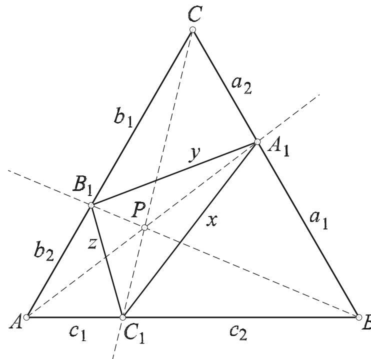
Ervin Duraković (3), Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka

2944. *Dana je točka P unutar jednakostraničnog trokuta ABC. Pravci AP, BP, CP sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama A_1, B_1, C_1. Dokaži nejednakost*

$$|A_1B_1|\cdot|B_1C_1|\cdot|C_1A_1| \geqslant |A_1B|\cdot|B_1C|\cdot|C_1A|$$

Rješenje. Prema oznakama na slici treba dokazati: $xyz \geqslant a_1b_1c_1$

Po kosinusovom poučku za trokute BA_1C_1, CB_1A_1, AC_1B_1 i AG nejednakosti vrijedi:



$$x^2=a_1^2+c_2^2-2a_1c_2\cos 60^\circ$$
$$=a_1^2+c_2^2-a_1c_2 \geqslant a_1c_2,$$
$$y^2=b_1^2+a_2^2-2b_1a_2\cos 60^\circ$$
$$=b_1^2+a_2^2-b_1a_2 \geqslant b_1a_2,$$
$$z^2=c_1^2+b_2^2-2c_1b_2\cos 60^\circ$$
$$=c_1^2+b_2^2-c_1b_2 \geqslant c_1b_2.$$

Odavde je: $(xyz)^2 \geqslant a_1b_1c_1a_2b_2c_2$

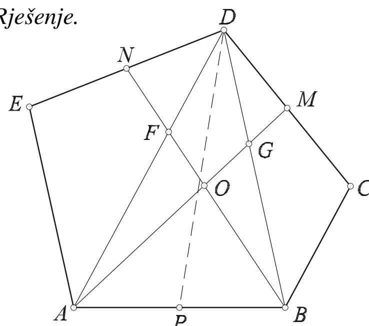
Prema Cevinom teoremu vrijedi $a_1b_1c_1=a_2b_2c_2$ pa slijedi

$$(xyz)^2 \geqslant (a_1b_1c_1)^2 \quad \text{tj.} \quad xyz \geqslant a_1b_1c_1.$$

Antonio Krnjak (3), Čakovec

2945. *Točke M i N su polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$ konveksnog peterokuta $ABCDE$ u kojem je $BC\|AD$ i $BD\|AE$. Ako je točka O presjek pravaca AM i BN dokaži da je $P(NDMO)=P(ABO)$.*

Rješenje.



Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$. U trapezu $ABCD$ točke P i M su polovišta krakova što znači da su jednako udaljene od osnovica pa je $P(AMD) = P(APD)$. Analogno je $P(BDN) = P(BDP)$. Vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}P(AMD) + P(BDN) &= P(APD) + P(BDP)\\ &= P(ABD)\\ &= P(ABO)+P(BGO)\\ &\quad +P(AOF)+P(DFOG).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(AMD)+P(BDN)=P(NDMO) &+ P(DFOG)\\ &+ P(AOF) + P(BGO).\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}&P(NDMO) + P(DFOG) + P(AOF) + P(BGO)\\ &= P(AOB) + P(BGO) + P(AOF) + P(DFOG)\\ &P(NDMO) = P(AOB).\end{aligned}$$

Antonio Krnjak (3), Čakovec

2946. *Nađi opće rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$x + y + z = 1$$

$$ax + by + cz = d$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2$$

gdje su a, b, c, d međusobno različiti realni brojevi.

Rješenje. Zadatak rješavamo uz pomoć determinanti.

Nakon sređivanja dobivamo:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\ d&b&c\\ d^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\ d&b&c\\ d^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{(c-d)(b-d)}{(a-b)(a-c)},$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\ a&d&c\\ a^2&d^2&c^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\ d&b&c\\ d^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)},$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\ a&b&d\\ a^2&b^2&d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\ d&b&c\\ d^2&b^2&c^2\end{vmatrix}}=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

Ervin Duraković (3), Rijeka

2947. *U ormaru se nalazi 10 različitih pari cipela. Slučajno su izabrane 4 cipele. Kolika je vjerojatnost da se između 4 izvučene cipele nalazi bar jedan par iste vrste?*

Rješenje. Izračunajmo broj načina na koje se mogu izabrati 4 cipele tako da među njima ne bude nijedan par iste vrste. U tom slučaju cipele moraju biti uzete iz 4 različita para. Od 10 pari mogu se 4 para izabrati na $\binom{10}{4}$ različita načina. Iz 4 para mogu se uzeti 4 cipele, i to iz svakog para po jedna, na 2^4 načina. Prema tome, broj načina na koji se mogu izabrati 4 cipele tako da među njima ne budu dvije iz istog para je

$$2^4\binom{10}{4} = 3360,$$

a broj svih načina na koje se od 10 pari mogu izabrati 4 cipele je $\binom{20}{4} = 4845$. Prema tome, vjerojatnost da među izabranim cipelama ne bude nijednog para iste vrste je $p_1 = \dfrac{3360}{4845}$, a tražena vjerojatnost je $p = 1 - p_1 = \dfrac{99}{323}$.

Ur.

2948. *Neka su a_1, a_2, ... a_{2n} međusobno različiti cijeli brojevi. Ako jednadžba*

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n})+(-1)^{n-1}(n!)^2 = 0,$$

ima cjelobrojno rješenje r, dokaži da je:

$$r = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n}.$$

Rješenje. Vidi se da je $r \neq a_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Tada su $r - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, također cijeli brojevi, pa je

$$|(r - a_1)(r - a_2) \ldots (r - a_{2n})|$$

$$\geqslant |1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-n)| = (n!)^2,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\{r - a_1, r - a_2 \ldots r - a_{2n}\} = \{1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n\}$$

Odavde slijedi

$$(r - a_1) + (r - a_2) + \ldots + (r - a_{2n}) = 2nr - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}) = 1+2+\ldots+n+(-1)+(-2)+\ldots+(-n)=0.$$

Dakle,

$$r = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n}.$$

Ur.

2949. *Niz* (x_n) *definiran je na ovaj način:* $x_1 = 0$,

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 + \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1}, \quad n \geqslant 1$$

Dokaži su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

Rješenje. Jednakost u definiciji zapišimo u obliku

$$x_{n+1} - 2x_n - 1 = \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1},$$

a nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_n x_{n+1} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0. \quad (1)$$

Zamjenimo li n sa $n+1$ možemo ovo zapisati kao

$$x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_{n+2} - 2x_{n+2} - 2x_{n+1} = 0. \quad (2)$$

Oduzimanjem (1) od (2) slijedi redom

$$x_{n+2}^2 - x_n^2 - 4x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) - 2x_{n+2} + 2x_n = 0,$$

$$(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n - 2) = 0. \quad (3)$$

Kako je $x_{n+2} > x_{n+1} > x_n$ iz (3) slijedi

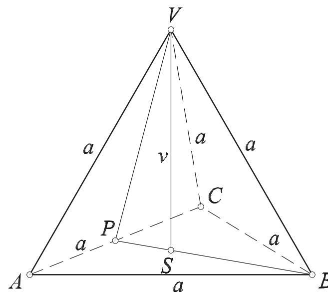
$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n + 2,$$

a kako je $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ slijedi $x_n \in \mathbf{N}$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

Ur.

2950. *Po tri brida dvaju tetraedara koji se sastaju u jednom vrhu imaju jednake duljine. U jednom od njih svaka dva od tih bridova određuju kutove od* 60°, *a u drugom tri brida određuju kutove od* 60°, 60° *i* 90°. *Dokaži da tetraedri imaju jednake volumene.*

Rješenje.

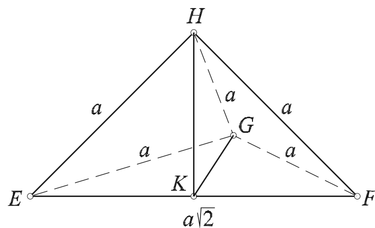


Neka je $ABCV$ tetraedar takav da je $|AV| = |BV| = |CV| = a$ te $\sphericalangle AVB = \sphericalangle BVC = \sphericalangle CVA = 60^\circ$. Tada su sve strane tetraedra jednakostranični trokuti. Neka je P polovište brida $\overline{AC}$, S ortogonalna projekcija točke V na bazu i V_1 volumen tetraedra. Iz pravokutnog trokuta PSV imamo:

$$v = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Slijedi

$$V_1 = \frac{B_1 v}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Promatrajmo zadani tetraedar $EFGH$ takav da je $|EH| = |FH| = |GH| = a$ i $\sphericalangle FHG = \sphericalangle GHE = 60^\circ$, $\sphericalangle EHF = 90^\circ$. Tada je $|EG| = |FG| = a$, $|EF| = a\sqrt{2}$. Neka je V_2 njegov volumen, a K polovište od $\overline{EF}$.

Vrijedi: $\sphericalangle EKH = \sphericalangle EKG = 90^\circ$ pa je prema Pitagorinom poučku $|KG| = |KH| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$|KG|^2 + |KH|^2 = 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 = |GH|^2.$$

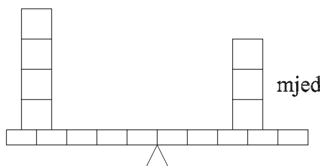
Prema obratu Pitagorina poučka trokut KGH je pravokutan, $\sphericalangle HKG = 90^\circ$ što znači da je $|KH|$ visina tetraedra. Sada je

$$V_2 = \frac{B_2 \cdot |KH|}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = V_1.$$

Antonio Krnjak (3), Čakovec

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 230. *Profesor Mudrić je dobio metalne kockice duljine brida 2 cm od dva različita materijala. Mjed je prepoznao po boji i zna da joj je gustoća 8500 kg/m^3. Pomoću ravnala na jednom štapu je označio jednake dužine i na njega postavljao kockice na jednu stranu, a kockice od nepoznatog materijala na drugu stranu dok nije dobio ravnotežu kao na slici. Kolika je gustoća nepoznate tvari?*



Rješenje.

$$F_1 = 4 \cdot G_1 = 4 \cdot m_1 \cdot g,$$
$$F_2 = 3 \cdot G_2 = 3 \cdot m_2 \cdot g,$$
$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2,$$
$$4 \cdot m_1 \cdot g \cdot l_1 = 3 \cdot m_2 \cdot g \cdot l_2,$$
$$4 \cdot m_1 \cdot l_1 = 3 \cdot m_2 \cdot l_2,$$
$$4 \cdot \rho_1 \cdot V \cdot l_1 = 3 \cdot \rho_2 \cdot V \cdot l_2,$$
$$4 \cdot \rho_1 \cdot l_1 = 3 \cdot \rho_2 \cdot l_2,$$
$$\rho_1 = \frac{3 \cdot \rho_2 \cdot l_2}{4 \cdot l_1} = \frac{3 \cdot 8500\,\text{kg/m}^3 \cdot 3}{4 \cdot 4}$$
$$= 4781.25\,\text{kg/m}^3,$$

Gustoća nepoznate tvari je $4781.25\,\text{kg/m}^3$.

Ur.

OŠ – 231. *Dario je učio o energiji u školi i zaključio da ako pije hladnu vodu ta se voda ugrije na temperaturu tijela (oko 37° C) na što se troši energija. Dakle, ako jede slatkiše dovoljno je piti hladnu vodu da potroši tu energiju. Izračunaj koliko litara hladne vode ($12^\circ C$) treba popiti da bi utrošio energiju jedne čokoladice od 30 g koja sadrži 150 kcal (1 cal = 4.2 J).*

Rješenje.

$$t_1 = 12^\circ\,\text{C}$$
$$t_2 = 37^\circ\,\text{C}$$
$$m = 30\,\text{g} = 0.03\,\text{kg}$$
$$1\,\text{kcal} = 4.2\,\text{kJ}$$
$$E = 150\,\text{k cal} = 150{\cdot}4.2\,\text{kJ} = 630\,\text{kJ} = 630\,000\,\text{J}.$$
$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = E,$$
$$m = \frac{E}{c \cdot \Delta t} = \frac{630\,000\,\text{J}}{4200\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot (37^\circ\text{C} - 12^\circ\text{C})} = 6\,\text{kg}.$$
$$V = \frac{m}{\rho} = 6\,\text{l}.$$

Dario bi trebao popiti 6 litara hladne vode!

Ur.

OŠ – 232. *Mirna je popodne provela vozeći se biciklom. Trećinu puta uzbrdo se vozila brzinom 5 km/h, drugu trećinu po ravnom je vozila brzinom 15 km/h, a zadnji dio puta se spuštala brzinom 30 km/h. Kolika je bila Mirnina srednja brzina vožnje tog popodneva?*

Rješenje.

$$v_1 = 5\,\text{km/h}$$
$$v_2 = 15\,\text{km/h}$$
$$v_3 = 30\,\text{km/h}$$
$$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{3}\,\text{s}$$

$$v = ?$$
$$v = \frac{s}{t}, \quad v = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3},$$
$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{1}{3}s}{5\,\text{km/h}} = \frac{1}{15\,\text{km/h}}s,$$

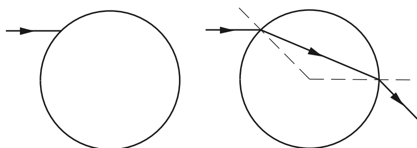
$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{\frac{1}{3}s}{15\,\text{km/h}} = \frac{1}{45\,\text{km/h}}s,$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{\frac{1}{3}s}{30\,\text{km/h}} = \frac{1}{90\,\text{km/h}}s,$$

$$v = \frac{s}{\frac{1}{15}s + \frac{1}{45}s + \frac{1}{90}s}\,\text{km/h} = 10\,\text{km/h},$$

Marina Furkes (2),
Gimnazija Frane Galovića, Koprivnica

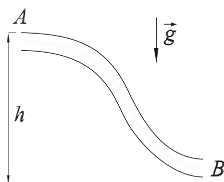
OŠ – 233. *Laserski snop pada okomito na os valjka od prozirnog materijala. Na slici je prikazan pogled odozgo. Nacrtaj putanju laserskog snopa.*



Rješenje. Pri ulasku u valjak laserski snop se lomi prema okomici (koja je u smjeru polumjera), a pri izlasku od okomice.

Ur.

1308. *Unutar cijevi duljine l, postavljene između točaka A i B s razlikom visina h, nalazi se konopac duljine l koji pridržavamo u točki A (slika). Koliko je ubrzanje svih točaka konopca u trenutku kad ga pustimo?*



Rješenje. Stanje u točki A:

$$E_{gp} = mgh, \quad E_k = 0.$$

Stanje u točki B:

$$E_{gp} = 0, \quad E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Iz zakona o očuvanju mehaničke energije slijedi

$$E_{gp} = E_k,$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{2gh}.$$

$$l = \frac{vt}{2}, \quad t = \frac{\sqrt{2gh}}{a},$$

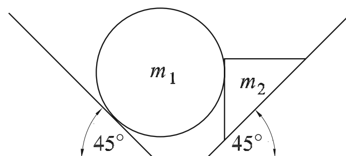
$$l = \frac{gh}{a},$$

$$a = g \cdot \frac{h}{l}.$$

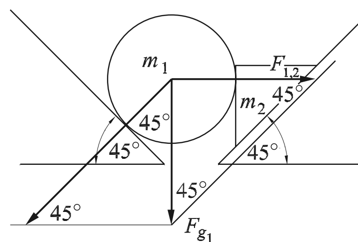
Akceleracija svih točaka konopca u trenutku kad ga spustimo bit će jednaka omjeru $\frac{h}{l}$ pomnoženim s akceleracijom sile teže.

Marko Čolić (2),
III. gimnazija, Osijek

1309. *Između dvije nepokretne kosine s kutovima od 45° nalazi se valjak mase m_1 i klin mase m_2 kao na slici. Nađi silu kojom klin djeluje na valjak.*



Rješenje.



$F_{1,2}$ – sila kojom valjak djeluje na klin,
$F_{2,1}$ – sila kojom klin djeluje na valjak.

Prema III. Newtonovu zakonu vrijedi:

$$F_{1,2} = F_{2,1}.$$

Sa slike je vidljivo da vrijedi:

$$F_{1,2} = F_{2,1} = F_{g_1} = m_1 g_1,$$

ili

$$F_{1,2} = m_1 g = F_{2,1} = \frac{m_2 g}{2}.$$

Mislav Kovačić (4),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1310. *Na raspolaganju imamo veću količinu vode temperature $t_1 = 20\,^\circ C$ i leda temperature $t_2 = 0\,^\circ C$. Koliko vode volumena V_1 i leda mase m_2 treba uzeti da bi se nakon njihovog miješanja u toplinski izoliranoj posudi dobilo $V = 2\,l$ vode temperature $t = 10\,^\circ C$? Specifična gustoća vode je $1\,000\,\frac{kg}{m^3}$, a njen specifični toplinski kapacitet iznosi $c_1 = 4.18 \cdot 10^3\,\frac{J}{kg\,K}$. Specifični toplinski kapacitet leda iznosi $c_2 = 2.1 \cdot 10^3\,\frac{J}{kg\,K}$, dok je količina topline potrebna da se 1 kg leda temperature $0\,^\circ C$ prevede u 1 kg vode iste temperature jednaka $\lambda = 3.3 \cdot 10^5\,\frac{J}{kg}$.*

Rješenje. Konačna masa vode u posudi iznosi:

$$m_v = V \cdot \varphi_v = 2\,\text{kg}.$$

Iz

$$m_v = m_l + m_v',$$

slijedi

$$m_v' = m_v - m_l \quad \text{tj.} \quad m_v' = 2 - m_l$$

Prema zakonu o očuvanju energije, energija koju početna količina vode u posudi otpusti (prema okolini) zbog hlađenja utrošit će se na prelazak leda iz čvrstog agregatnog stanja u tekuće (tj. vodu) i na zagrijavanje te novonastale vode.

Zato je

$$m_v' \cdot c_v \cdot \Delta t = m_l \cdot \lambda + m_l \cdot c_v \cdot \Delta t',$$
$$\Delta t = t_1 - t = 10\,^\circ\text{C} \quad \text{tj.} \quad \Delta t = 10\,\text{K},$$
$$\Delta t' = t - t_2 = 10\,^\circ\text{C} \quad \text{tj.} \quad \Delta t' = 10\,\text{K}.$$

Sada je

$$4\,180 \cdot 10 \cdot m_v' = 330\,000 \cdot m_l + 4\,180 \cdot 10 \cdot m_l,$$
$$41\,800 \cdot (2 - m_l) = 330\,000 \cdot m_l + 41\,800 \cdot m_l,$$

odakle je

$$413\,600 \cdot m_l = 83\,600,$$
$$m_2 = m_l = 0.202\,\text{kg}$$

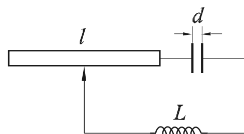
$$m_V' = 2 - m_l = 1.798\,\text{kg},$$

$$V_1 = V_1' = \frac{m_v'}{\varphi_v} = 1.798\,\text{l}.$$

Za ostvarit uvjete zadatka treba uzeti $m_2 = 0.202$ kg leda temperature $t_2 = 0\,^\circ$C i $V_1 = 1.798$ l vode temperature $t_1 = 20\,^\circ$C.

Marin Mišur (3),
Gimnazija "Metković", Metković

1311. *Metalni štap duljine l, Youngovog modula elastičnosti E_Y i gustoće ρ ukliješten je na sredini. Na jednom kraju štapa nalazi se pričvršćena laka metalna kvadratna pločica stranice a (vidi sliku), a nasuprot nje na udaljenosti d pričvršćena je još jedna takva pločica.*



U električni krug priključena je i zavojnica koeficijenta samoindukcije L. Kolika je rezonantna frekvencija ν ovog kruga kada štap miruje, a kolika kada vrši longitudinalne oscilacije s amplitudom x_0?

Rješenje. Bez oscilacija, rezonantna frekvencija je

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

gdje je $C = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{d}$, tj.

$$\nu = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{d}{L\varepsilon_0}}.$$

U drugom slučaju, valne dužine stojećih valova λ_n su dane s $l = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$, gdje je n prirodan broj. Brzina ovih valova je

$$v = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}},$$

pa su frekvencije titranja $\omega_n = \dfrac{2\pi\lambda_n}{v}$,

$$\omega_n = \frac{4\pi l}{(2n+1)v} = \frac{4\pi l}{2n+1}\sqrt{\frac{\rho}{E_y}}.$$

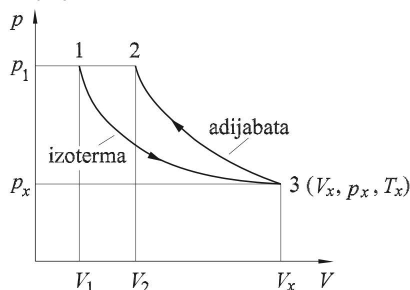
Udaljenost između pločica je $d + x_0 \sin\omega_n t$, a rezonantna frekvencija koja je vremenski ovisna i iznosi

$$\nu_n = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{d + x_0\sin\omega_n t}{L\varepsilon_0}}.$$

Ur.

1312. *Dvije posude jednakih volumena međusobno su spojene cjevčicom s ventilom. U jednoj posudi se nalazi jedan mol idealnog jednoatomskog plina na temperaturi T_1, a u drugoj posudi je vakuum. Posuda u kojoj se nalazi plin je toplinski izolirana od okoline, dok je druga posuda u toplinskom kontaktu s toplinskim spremnikom čija je temperatura $T_2 = T_1$. Naći promjenu unutarnje energije i promjenu entropije kada se otvori ventil poslije "beskonačno" dugog vremena.*

Rješenje. Prije otvaranja ventila plin ima parametre: T_1, V_1 i p_1. Poslije otvaranja ventila nakon određenog vremena kada se uspostavi termodinamička ravnoteža parametri plina su: $T_2 = 2T_1$, $V_2 = 2V_1$ i p_1. Promjena unutarnje energije je: $\Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \dfrac{3}{2}RT_1$. Budući je entropija funkcija stanja i ovisi samo o početnom i konačnom stanju, a ne ovisi o putu kojim je sistem ostvario taj prelazak, promjenu entropije možemo izračunati preko bilo kojih procesa koji povezuju ta dva stanja. Jedno od mogućih rješenja je dano na slici



$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2,$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \quad \Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Pri izotermnom procesu imamo $\Delta U = 0$ tj. $\Delta Q = \Delta A = nRT\ln\dfrac{V_x}{V_1}$ pa je $\Delta S_1 = \dfrac{\Delta A}{T} = nR\ln\dfrac{V_x}{V_1}$. Pri adijabatskom procesu $\Delta Q = 0$ tj. $\Delta S_2 = 0$.

1–3: $T = \text{const.} \Rightarrow p_1V_1 = p_xV_x$,

3–2: $S = \text{const.} \Rightarrow p_xV_x^\gamma = p_1V_2^\gamma$,

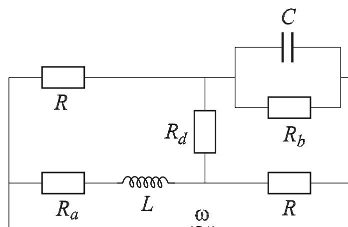
$$\frac{V_x}{V_1} = 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3},$$

$$\Delta S = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln 2 = \frac{5}{2}R\ln 2.$$

Ur.

1313. *Strujni krug prikazan na slici spojen je na izvor izmjenične struje frekvencije ω. Poznate su vrijednosti otpora $R = 0.1\ k\Omega$ i kapaciteta $C = 1.5\ \mu F$, a krug je podešen tako da kroz otpornik R_d ne teče struja. Odredite koeficijent samoindukcije L.*



Rješenje. Kako kroz otpornik R_d ne teče struja, tu granu kruga možemo zanemariti. Razlika potencijala na krajevima ovog otpornika je jednaka nuli, tj.

$$U\frac{R_a+i\omega L}{R_a+i\omega L+R}=U\frac{R}{R+(1/R_b+i\omega C)^{-1}}.$$

Dalje je $\dfrac{R}{R_a+i\omega L}=\dfrac{(1/R_b+i\omega C)^{-1}}{R}$, pa izjednačavanjem imaginarnih dijelova dobijemo $L=R^2C$, odnosno $L=15$ mH.

Ur.

1314. *Slijepi miš leti prema stijeni brzinom $v = 10$ m/s, pri čemu proizvodi ultrazvuk frekvencije $\nu_0 = 45$ kHz. Koju frekvenciju ν ultrazvuka odbijenog od stijene registrira slijepi miš, ako je brzina zvuka $c = 340$ m/s?*

Rješenje.

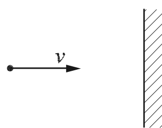
$v = 10$ m/s
$\nu_0 = 45$ kHz
$c = 340$ m/s

$\nu = ?$

Koristit ćemo Dopplerov efekt. Izvor (slijepi miš) se giba, a prijamnik (stijena) miruje. (Izvor se giba prema prijamniku).

Frekvencija koju prima prijamnik je:

$$\nu' = \nu_0\cdot\frac{c}{c-v}$$



Ultrazvuk frekvencije ν' se odbija prema slijepom mišu tako da je sada slijepi miš prijamnik, a stijena izvor, pa je frekvencija ν ultrazvuka koju registrira slijepi miš (izvor (stijena) miruje, a prijamnik (slijepi miš) se giba):

$$\nu = \nu'\frac{c+v}{c}.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\nu = \nu_0\cdot\frac{c}{c-v}\cdot\frac{c+v}{c},$$

$$\nu = \nu_0\cdot\frac{c+v}{c-v},$$

$$\nu = 48\,\text{kHz}.$$

Mislav Kovačić (4), Šibenik

Rješenja zabavne matematike

Točke u kvadratu

Podijelimo kvadrat na 25 kvadratića duljine stranice 4 cm. Prema Dirichletovom načelu tada se u jednom od tih kvadratića nalazi barem 5 točaka (uočimo da je $101 = 25\cdot4+1$). Krug opisan tome kvadratiću ima polumjer manji od 3 cm (provjerite!).

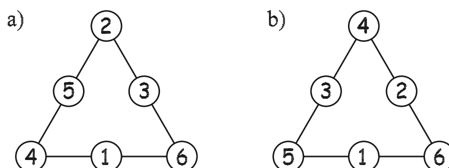
Mala zbrajaljka

Tražene zamjene su: AEIMOPRST = 249513706, AEIMOPRST = 986315027.

Igra

Može. Sestra samo treba pisati znamenku koja s predhodnom daje zbroj 6. Na taj način dobiva se osamnaesteroznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenki jednak $9\cdot6=54$, pa je taj zbroj djeljiv s 9.

Brojevi i trokut



Zemljište

Neka su a, b i c redom tražene svote. One zadovoljavaju jednakosti $a+b/2+c/2=340\,000$, $a/3+b+c/3=340\,000$, $a/4+b/4+c=340\,000$. Rješenje ovog sustava je $a=100\,000$, $b=220\,000$, $c=260\,000$. Braća su imala 100 000, 220 000 i 260 000 kuna.

46. međunarodna matematička olimpijada

Rudi Mrazović i Kristina Škreb, Zagreb

Ove je godine grad Mérida u Meksiku bio domaćin 46. međunarodne matematičke olimpijade koja se održavala od 8. do 19. srpnja. U svijetu se inače organizira i nekoliko drugih olimpijada znanja (fizika, kemija, informatika, astronomija, biologija), no matematičari zasigurno imaju najveću tradiciju. Na ovogodišnjoj je olimpijadi sudjelovalo 514 natjecatelja iz 91 države. Hrvatsku je, kao i većinu drugih zemalja, predstavljalo šest natjecatelja: *Toni Baržić* (4. r.), *Goran Dražić* (3. r.), *Nikola Grubišić* (4. r.), *Rudi Mrazović* (4. r.), *Kristina Ana Škreb* (4. r.), *Katja Trinajstić* (4. r.). Voditelji hrvatske olimpijske ekipe bili su *Ilko Brnetić* s Fakulteta elektrotehnike i računarstva i *Mea Bombardelli* s Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

Dok je *Ilko Brnetić*, kao član međunarodnog žirija, u Meksiko otišao 8. srpnja, radi biranja šest zadataka za natjecanje, mi smo u pratnji voditeljice *Mee Bombardelli* krenuli tri dana kasnije avionom u Frankfurt, gdje smo se, nakon kraćeg čekanja, ukrcali u avion za Ciudad de México, u koji smo stigli sedam sati kasnije. Napokon, nakon tri sata čekanja na ogromnom meksičkom aerodromu, avion je napokon krenuo u Méridu, inače najveći grad na poluotoku Yucatan, poznatom po tome što su ga u povijesti nastanjivale mnoge drevne civilizacije, od kojih su najveći trag zasigurno ostavile Maje. Tijekom leta za Méridu imali smo priliku razgovarati s jednim Meksikancem, koji nas je, zahvaljujući izvrsnom poznavanju engleskog jezika, izvijestio o nekim obilježjima Méride. Kako su nas i prije pripremali na visoke temperature, ono što smo čuli nije nas previše iznenadilo. Naime, Mérida je najtopliji grad u Meksiku s prosječnom temperaturom u hladu od 42 °C, a vlažnost se kreće oko 95%. Zbog tih su razloga neki od nas pri izlasku iz aviona doslovce jedva disali. Na našu sreću, brzo smo se aklimatizirali (bolje reći, koliko je to bilo moguće). Hotel je bio više nego luksuzan i zasigurno puno bolji od onoga što smo očekivali. Pri dobivanju soba, vjerojatno radi svoga šarma, najbolje je prošla ljepša trećina naše ekipe. Uslijedio je dan pripreme za natjecanje, a nakon toga i dva dana samog natjecanja. Većina natjecatelja i voditelja su se složili da su zadaci bili nešto lakši i manje elegantni nego prošlih godina o čemu svjedoče i dosta visoki pragovi, a naročito podatak da je čak šesnaest učenika uspjelo ostvariti maksimalni broj bodova. Od naših učenika, *Goran Dražić* osvojio je srebrnu medalju, *Rudi Mrazović* i *Nikola Grubišić* brončane, dok su *Kristina Škreb* i *Toni Baržić* dohvatili pohvale. Zanimljivo je spomenuti da je nakon nekoliko godina ponovo dodijeljena posebna nagrada za izuzetno i originalno rješenje. To iznimno priznanje primio je Moldavac *Boreico Iurie* za svoje osobito lijepo rješenje trećeg zadatka.

Nakon natjecanja uslijedilo je športsko natjecanje, kao i nekoliko izleta. Hrvatska je napokon "uspjela osvojiti prva dva zlata" na olimpijadi. Nažalost, radilo se o športskim turnirima, a ne o matematici. Naime, koalicija Hrvatska – Bosna i Hercegovina – Srbija i Crna Gora porazila je sve suparnike u košarci i nogometu. Nakon jednog iscrpnog dana u kojem su mnogi bili blizu nesvijesti zbog igranja nogometa na 45 °C, uslijedio je dan rezerviran za obilaženje znamenitosti Yucatana. Posjetili smo znamenitu Chichen Itzu

u kojoj se nalaze ostavštine Maja, od kojih je ponajviše fascinantna ogromna piramida. Iako su te građevine odavno izgrađene, treba priznati da Meksikanci itekako drže do toga da one ne padnu u zaborav, tako da se svake večeri oko famoznih građevina organiziraju razna zbivanja, od kojih Meksikanci s ponosom izdvajaju gostovanje legendarnog tenora *Luciana Pavarottija*. Pred sam kraj našeg boravka u Meksiku, imali smo i jednog neočekivanog gosta. Bio je to uragan Emily. Iako su nas Meksikanci uvjeravali da se radi o jednom od najjačih uragana u posljednjih dvadesetak godina, uspješno smo i to proživjeli. Iako su meteorolozi najavljivali da će uragan proći točno preko Méride, uvjerili smo se da to nije bilo baš tako. Treba odati priznanje i osoblju hotela koji su već bili pripremljeni za ovakve, za nas iznenadne, situacije. Dva dana nakon toga krenuli smo prema Frankfurtu. Za razliku od kolega Srba koji su na svoj avion zakasnili petnaestak minuta, mi smo se na vrijeme ukrcali i sigurno sletjeli u Zagreb gdje nas je čekao velik broj novinara. U narednih nekoliko dana primili su nas ministar znanosti, obrazovanja i športa *dr. Dragan Primorac* i predsjednik Republike *Stjepan Mesić*, a Zagrepčane je ugostio i njihov gradonačelnik *Milan Bandić*.

Na samom kraju ovog izvještaja, željeli bi se zahvaliti Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa koje je financiralo pripreme u trajanju od tri tjedna, kao i mnogobrojnim sponzorima, a to su bili: "Nike", "Kraš", "Zvečevo", "Jamnica", "Toz" i općina Viškovo. Ipak najveće zahvale našim voditeljima, kao i svim mentorima, koji su održavali pripreme za olimpijadu i za natjecanja ove školske godine. Što drugo reći za kraj nego poželjeti uspjeh, još bolji od našeg, na predstojećim olimpijadama u Sloveniji, Vijetnamu, Španjolskoj, Njemačkoj,... Nadamo se da će za nekoliko godina i Hrvatska biti domaćin Međunarodne matematičke olimpijade.

Zadaci

Prvi dan, srijeda, 13. srpnja.

1. Na stranicama jednakostraničnog trokuta ABC nalazi se šest točaka: A_1 i A_2 na $\overline{BC}$, B_1 i B_2 na $\overline{CA}$ te C_1 i C_2 na $\overline{AB}$. Te točke su vrhovi konveksnog šesterokuta $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ čije stranice imaju jednake duljine. Dokažite da se pravci A_1B_2, B_1C_2 i C_1B_A sijeku u jednoj točki.

(Rumunjska)

2. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz cijelih brojeva koji ima beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova. Poznato je da za svaki prirodan broj n, brojevi $a_1, a_2, \ldots a_n$ daju n različitih ostataka pri dijeljenju s n. Dokažite da se svaki cijeli broj pojavljuje u ovom nizu točno jedanput.

(Nizozemska)

3. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz \geqslant 1$. Dokažite da je

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

(Južna Koreja)

Drugi dan, četvrtak, 14. srpnja.

4. Niz $a_1, a_2, \ldots$ definiran je s

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nađite sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom ovog niza.

(Poljska)

5. Neka je $ABCD$ konveksan četverkut čije stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ imaju jednake duljine i nisu paralelne. Neka je E točka na stranici $\overline{BC}$, različita od B i C te neka je F točka na stranici $\overline{AD}$, različita od A i D, tako da je $|BE| = |DF|$. Pravci AC i BD sijeku se u točki P, pravci BD i EF u točki Q, a pravci EF i AC u točki R. Promotrimo trokute PQR koje dobivamo za sve takve točke E i F. Dokažite da ovim trokutima opisane kružnice imaju zajedničku točku različitu od P.

(Poljska)

6. Na matematičkom natjecanju bilo je zadano 6 zadataka. Pokazalo se da je svaki par zadataka riješilo više od $\frac{2}{5}$ ukupnog broja natjecatelja, ali nitko nije riješio svih 6 zadataka. Dokažite da postoje barem 2 natjecatelja takva da je svaki od njih riješio točno 5 zadataka.

(Rumunjska)

Rang–lista

	nagrade			broj
	I	II	III	bod.
Kina	5	1		235
SAD	4	2		213
Rusija	4	2		212
Iran	2	4		201
Južna Koreja	3	3		200
Rumunjska	4	1	1	191
Tajvan	3	2	1	190
Japan	3	1	2	188
Mađarska	2	3	1	181
Ukrajina	2	2	2	181
Bugarska	2	3	1	173
Njemačka	1	3	2	163
Ujedinjeno Kraljevstvo	1	3	2	159
Singapur		4	2	145
Vijetnam		3	3	143
Češka	1	2	2	139
Hong Kong	1	3	1	138
Bjelorusija	1	3	1	136

	nagrade			broj
	I	II	III	bod.
Kanada	1	2	2	132
Slovačka		4	2	131
Moldavija	1	2	2	130
Turska		4	1	130
Tajland		4	2	128
Italija		2	4	120
Australija			6	117
Kazahstan		2	3	112
Kolumbija		2	2	105
Poljska		1	5	105
Peru			6	104
Izrael		2	3	99
Meksiko			4	91
Francuska			4	83
Armenija			5	82
Brazil	1		1	82
Hrvatska		1	2	82
Indija		1	1	81

	nagrade			broj
	I	II	III	bod.
Gruzija			4	80
Novi Zeland		1	2	77
Srbija i Crna Gora			3	75
Austrija			2	74
Belgija		1	1	74
Indonezija			3	70
Švicarska		1	1	70
Danska			4	69
Estonija			3	68
Argentina		1	2	65
Latvija			2	62
Nizozemska			2	62
Azerbajdžan			2	59
Grčka			2	59
Irska		1		55
Kuba (4)			3	54
Litva			1	53
Makedonija			2	50
Bosna i Hercegovina			2	49
Finska			2	49
Slovenija		1		49
Kirgistan			2	46
Španjolska			1	46
Albanija		1		44
Švedska				42
Južnoafrička Republika				39
Makao			1	38
Norveška				38

	nagrade			broj
	I	II	III	bod.
Kostarika				37
Urugvaj			1	37
Šri Lanka			1	32
Filipini				30
Portugal				27
Salvador				25
Island			1	23
Maroko				18
Turkmenistan (3)			1	18
Ekvador			1	17
Malezija				15
Venecuela (2)				15
Cipar				14
Trinidad i Tobago				13
Paragvaj				12
Pakistan				11
Tunis (3)				9
Portoriko				8
Gvatemala (3)				6
Lihtenštajn (3)				4
Bangladeš				3
Kuvajt (5)				3
Luksemburg (2)				3
Saudijska Arabija (5)				3
Tadžikistan (3)				3
Mozambik (5)				2
Bolivija (2)				0

⋆⋆⋆

Nemoguće je biti matematičar, a da se ne bude pjesnik u duši.

Sofia Kovaljevskaja (1850. – 1891.),
ruska matematičarka

Matematičar koji nije pomalo i pjesnik, nikad neće biti veliki matematičar.

Karl Weierstraš (1815. – 1897.),
njemački matematičar

14. državna smotra i natjecanje mladih fizičara, Gospić, 12. – 15. svibnja 2005.

Hrvatsko fizikalno društvo, Zavod za školstvo Republike Hrvatske i Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa organizirali su i prošle školske godine natjecanje iz fizike učenika osnovnih i srednjih škola Republike Hrvatske.

Školska natjecanja su održana tijekom siječnja i veljače 2005. godine. Općinska natjecanja 8. ožujka 2005. Zadatke je sastavilo državno povjerenstvo i dostavilo ih u 138 škola, domaćina natjecanja, elektroničkom poštom pola sata prije natjecanja. U natjecanju je sudjelovalo više od dvije tisuće učenika. Na temelju uspjeha na općinskom natjecanju županijska povjerenstva su pozvala učenike na županijsko natjecanje koje je održano 7. travnja 2005. I za ovu razinu natjecanja zadatke je pripremilo državno povjerenstvo i dostavilo ih u škole elektroničkom poštom na sam dan natjecanja. Sudjelovalo je 1107 učenika osnovnih i srednjih škola. Nakon što su županijska povjerenstva dostavila izvješća, državno povjerenstvo je uskladilo bodovanje i prema jedinstvenim listama poretka za pojedine kategorije pozvalo učenike na državno natjecanje.

Pored natjecanja u znanju koje se odvija na spomenute četiri razine (školsko, općinsko, županijsko i državno) učenici osnovnih i srednjih škola tijekom školske godine osmišljavali su i izvodili eksperimente. Autori najboljih samostalnih eksperimentalnih radova pozvani su na državnu smotru.

Državna smotra i natjecanje mladih fizičara održano je u Gospiću od 12. do 15. svibnja. Domaćin je bila Gimnazija Gospić. Sudjelovalo je 156 učenika osnovnih (68) i srednjih (88) škola te 123 nastavnika i članova državnog povjerenstva. Sudionici su bili smješteni u hotelu Zagreb u Karlobagu.

Iako je program događanja bio jako opsežan sve je proteklo izvrsno. Djelatnici gimnazije na čelu s ravnateljicom, gospođom Ankom Lemić, učinili su boravak u Gospiću nezaboravnim. Putovanje iz Karlobaga u Gospić i nazad bio je poseban doživljaj. Jadran, Velebit i Lika bili su obasjani suncem ‘samo za nas’, jer je prije i poslije padala kiša.

U subotu navečer, na svečanom zatvaranju najboljima su dodijeljene diplome i knjige po kategorijama i grupama kako slijedi.

Učenici osnovne škole

Ivan Domladovec, OŠ Matije Gupca, Zagreb, *Ilijan Kotarac*, OŠ Kneza Trpimira, Kaštel Gomilica, *Magdalena Magličić*, OŠ Švarča, Karlovac, (I. nagrada); *Manuela Činko*, OŠ Buzet PŠ Roč, Roč, *Filip Dumbović*, OŠ Eugena Kumičića,Velika Gorica, *Nikolina Stanić*, OŠ Turnić, Rijeka, *Marija Galić*, OŠ Petra Krešimira IV., Šibenik, *Branimir Mihaljević*, OŠ Antuna Gustava Matoša, Zagreb, *Jakša Markotić*, OŠ Plokite, Split, *Hrvoje Planinić*, OŠ Ante Kovačića, Zagreb, *Josip Užarević*, OŠ Bogoslava Šuleka, Slavonski Brod, (II. nagrada); *Anamarija Fofonjka*, OŠ Bogumila Tonija, Samobor, *Frane Paštrović*, OŠ Lovra pl. Matačića, Zagreb, *Franjo Čorak*, OŠ Sv. Mateja, Viškovo, *Goran Markek*, OŠ Josipa Badalića, Graberje Ivaničko, *Veronika Sunko*, OŠ J. J. Strossmayera, Zagreb, *Stipe Vujić*, OŠ Kneza Mislava, Kaštel – Sućurac, *Irma Telarović*, I. OŠ Dugave, Zagreb, (III. nagrada).

Samostalni eksperimentalni radovi

Ivica Sertić i *Slaven Mišak*, I. OŠ Varaždin, Varaždin, (I. nagrada); *Tea Plaftak* i *Marijana Lastavec*, OŠ Kuršanec, Kuršanec, (II. nagrada); *Nataša Orejaš* i *Matea Lukačić*, OŠ Sidonije Rubido Erdödy, Gornja Rijeka (III. nagrada).

Učenici srednje škole

1. grupa:

Matija Vrhovec, Gimnazija Antuna Gustava Matoša, Zabok (I. nagrada); *Ivan Šandrk*, V. gimnazija, Zagreb, *Juraj Klarić*, XV. gimnazija, Zagreb, (II. nagrada); *Ivan Peris*, Gimnazija Karlovac, Karlovac, *Matija Varga*, V. gimnazija, Zagreb, *Luka Štambuk*, III. gimnazija, Split (III. nagrada).

2. grupa:

Matija Hustić, Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod, (I. nagrada); *Tomislav Haus*, Gimnazija Antuna Gustava Matoša, Zabok, *Mijo Tvrdojević*, Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod, (II. nagrada); *Lenka Vukšić*, III. gimnazija, Split, *Albert Ćosić*, Gimnazija Karlovac, Karlovac, *Dario Đurđević*, Elektrotehnička i prometna škola, Osijek, (III. nagrada).

3. grupa:

Marko Popović, V. gimnazija, Zagreb, (I. nagrada); *Goran Dražić*, V. gimnazija, Zagreb, *Damjan Pelc*, V. gimnazija, Zagreb, (II. nagrada); *Tomislav Bronić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Lovre Bošnjak*, ŠS fra Andrije Kačića Miošića, Ploče, *Ivan Rančić*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, (III. nagrada).

4. grupa:

Antonio Majdandžić, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, (I. nagrada); *Alen Karabegović*, V. gimnazija, Zagreb, *Nikola Marković*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, (II. nagrada); *Nikola Grubišić*, V. gimnazija, Zagreb, *Filip Kos*, XV. gimnazija, Zagreb, *Goran Radanović*, III. gimnazija, Split, (III. nagrada).

Samostalni eksperimentalni radovi

Edo Pekarić i *Dinko Oletić*, Gimnazija Čakovec, Čakovec, (I. nagrada), *Ivan Vučak* i *Neven Čaplar*, I. gimnazija, Zagreb, (II. nagrada); *Stjepan Vučković*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, (III. nagrada).

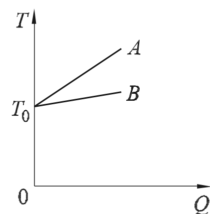
Osnovna škola

Pismeni zadaci

1. Dizalica ima motor snage 7.5 kW. Nađite masu tereta kojeg dizalica podiže stalnom brzinom 6 m/min, ako je korisnost dizalice 80 %.

2. Udaljenost radio prijamnika od odašiljača koji emitira radio valove iznosi 100 km. Kolika treba biti udaljenost slušatelja od prijamnika, da bi zvuk valne duljine 75 cm i frekvencije 440 Hz, kojeg emitira prijamnik, do slušatelja putovao jednako dugo kao radio valovi od odašiljača do prijamnika? Brzina širenja radio valova iznosi $3 \cdot 10^8$ m/s.

3. Istovremeno zagrijavamo tijela A i B, koja su jednakih masa. Graf prikazuje kako im dovođenjem topline raste temperatura od neke početne vrijednosti T_0. Na osnovu grafa zaključite koje tijelo ima veći specifični toplinski kapacitet. Obrazložite svoj odgovor!

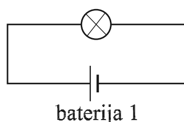


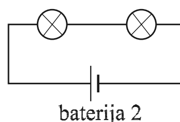
4. Neka kocka tlači podlogu tlakom od 8000 Pa. Druga je kocka iste težine, ali je načinjena od materijala osam puta veće gustoće. Kolikim će tlakom ta kocka djelovati na podlogu?

5. Na shemi su prikazana dva strujna kruga. Baterije 1 i 2 su nove i međusobno jednake. Sve žaruljice su također međusobno jednake.

a) Napišite izraz za snagu žaruljice u krugu 1, te izraz za ukupnu snagu žaruljica u krugu 2, ako je napon svake od baterija U, a otpor žaruljica se može smatrati stalnim. Koliki je omjer snaga u krugovima 1 i 2?

b) Ako oba kruga istovremeno uključimo i ostavimo uključene dugo vremena, hoće li se prvo istrošiti baterija 1, baterija 2 ili obje baterije istovremeno? Obrazložite odgovor!



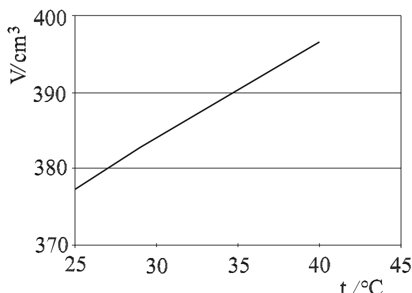


Praktični zadaci

1. Od plastelina napravi tri kuglice masa m, $2m$ i $3m$. Na nit duljine 25 cm pričvrsti kuglicu plastelina i odredi frekvenciju i period tog njihala. Ponovi mjerenje za sve tri kuglice. Nacrtaj dijagram $f - m$. Ovisi li frekvencija o masi?

2. U strujni krug veži u seriju žaruljicu A i paralelan spoj otpornika i žaruljice B. Nacrtaj shemu spoja. Odredi omjer energija koje se pretvaraju u druge oblike u žaruljici A i B.

3. Otapanjem praška za pecivo u vodi stvara se plin CO_2. Otopi prašak za pecivo u tikvici s vodom sobne temperature i sakupi taj plin. Procijeni volumen plina na sobnoj temperaturi ($V_{\text{kugla}} = 4/3r^3\pi$). Pokus ponovi s vodom temperature oko 35 – 40 °C. Što zamjećuješ? Objasni. Procijeni, iz priloženog dijagrama, da li je temperatura razvijenog plina jednaka temperaturi vode.



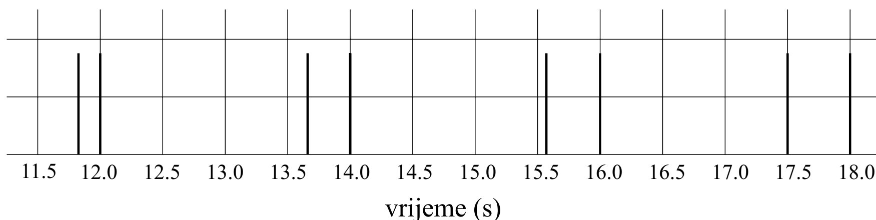
1. grupa

1. Nerastezljiva savitljiva nit zanemarive mase položena je na vodoravni stol, okomito na njegov rub. Nit je dugačka 150 cm, a na svakih 10 cm na nju je (počevši od kraja niti) pričvršćena mala kuglica mase 100 g. Jedan kraj niti stavimo tik preko ruba stola i pustimo da se giba pod utjecajem sile teže. Odredite:

a) vrijeme potrebno da prva sljedeća kuglica (u odnosu na prvu koju smo stavili tik preko ruba stola) dođe do ruba stola, te njenu brzinu u tom trenutku;

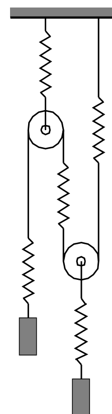
b) brzine šeste i jedanaeste kuglice u trenutku kada one prelaze rub stola.
(Zanemarite trenje i dimenzije kuglica.)

2. Brod se jednolikom brzinom približava okomitoj stjenovitoj obali. Na brodu se nalaze izvor i prijamnik kratkih (ultra) zvučnih signala: izvor svake 2 sekunde emitira jedan kratki signal ('bip'), a prijamnik registrira dva kratka signala – originalni i povratni koji se odbio od obale (prijamnik ne razlikuje povratni signal od originalnog). Odredite brzinu kojom se brod giba ako je dio grafičkog prikaza svih detektiranih zvučnih signala dan na slici:



(Brzina zvuka iznosi 340 m/s i ne ovisi o brzini kojom se giba pripadni izvor.)

3. Sustav od dva utega, nerastezljive niti zanemarive mase, dvije pomične koloture i pet identičnih opruga (s istom konstantom opruge) nalazi se u ravnoteži u Zemljinom gravitacijskom polju. Odredite kako se međusobno odnose produljenja pojedinih opruga. Možete pretpostaviti da je duljina opruga u opuštenom stanju zanemariva. (Zanemarite trenje, te masu kolotura i opruga.)



4. U jednom sunčevom sustavu u svemiru postoje dvije, po dimenzijama, iste (kuglaste) planete različite gustoće. Obje planete imaju po jedan manji satelit–pratilac, koji se oko planeta giba po kružnici istog polumjera. Astronomskim promatranjem je uočeno da za vrijeme dok jedan pratilac napravi dva kruga oko planeta, drugi pratilac (svoj) planet obiđe tri puta. Odredite kako se međusobno odnose gustoće planeta.

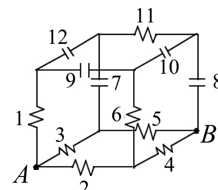
2. grupa

1. U ishodište koordinatnog sustava postavljen je električni naboj $q_1 = -q$, a na x-os u točkama $x_2 = -l$ i $x_3 = x$ naboji $q_2 = q_3 = +4q$, gdje je $q = 25\,\mu\mathrm{C}$, a $l = 85$ cm.

a) Odredite vrijednost x za koju je sustav u statičkoj ravnoteži.

b) Napišite potencijalnu energiju naboja q_3 kao funkciju od $x > 0$ i izračunajte njezin iznos za ravnotežni položaj. Kakva je to ravnoteža? Objasnite! Svi naboji nalaze se u zraku $(\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\mathrm{C}^2/(\mathrm{Nm}^2))$.

2. U 3D krugu na slici, svi elementi kruga se nalaze na bridovima kocke. Svi otpornici imaju jednake otpore R, a svi kondenzatori jednake kapacitete C. Napon između točaka A i B je V. Izračunajte koliki naboj je na kondenzatoru kod B (označenim brojem 8).



Napomena: Svaki element strujnog kruga označen je brojkom. Pažljivo nacrtajte ekvivalentnu shemu 3D kruga u dvije dimenzije.

3. Razmotrite dva pločasta kondenzatora C_1 i C_2 na kojima su, redom, naboji Q_1 i Q_2.

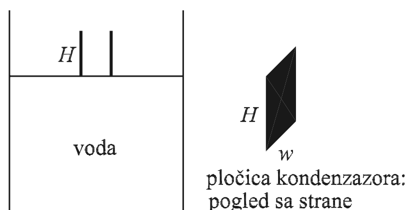
a) Kolika je ukupna energija ova dva kondenzatora? Nakon toga međusobno se spoje dvije pozitivno i dvije negativno nabijene ploče

b) Kolika je sada energija sistema? Postoji li razlika u odnosu na slučaj a)?

c) Što se dogodilo s energijom sistema nakon spajanja ploča?

d) Koja je razlika u energiji između praznog kondenzatora i kondenzatora punog vode, ako je na svakom isti naboj?

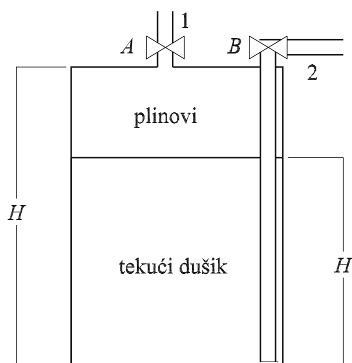
e) Što će se dogoditi ako se (nekim nabojem Q) nabijeni kondenzator stavi na površinu vode kao na slici? Zašto? Nađite ukupnu energiju sistema E_{ukupno} kao funkciju visine h do koje se popela voda. Razmak između ploča je d.



Slika uz dio e) zadatka.

4. Za transfer ("istakanje") tekućeg dušika (točka vrelišta $T_V = 77.3$ K) iz toplinski izoliranog spremnika (tzv. dewara) koristi se sljedeća metoda: U dewar oblika valjka polumjera baze r i visine H s dva ventila (A i B) se kroz cijev 1 napuhne određena količina plinovitog dušika. Ovaj (topli) plin ispari određenu količinu tekućeg dušika uslijed čega se stvara nadtlak (u odnosu na vanjski, atmosferski tlak) koji, pri konstantnoj temperaturi plina iznad tekućine, tjera tekući dušik kroz cijev 2. Pretpostavimo da su napravljene sljedeće radnje:

1. Ventil A je zatvoren, a B otvoren i tada su razine tekućina u dewaru i cijevi 2 jednake. Također,



tada se u dewaru iznad tekućine nalazi samo plinoviti
dušik na temperaturi T_V.

2. Ventil B se zatvori i otvori ventil A kroz koji se napuhne 25 l plinovitog dušika pri standardnim uvjetima ($p_0 = p_A = 101\,325\,\mathrm{Pa}$, $T_0 = 273.15\,\mathrm{K}$).

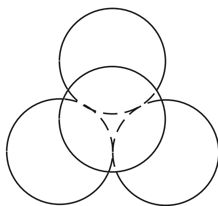
3. Pričeka se neko vrijeme (do uspostave termičke ravnoteže i stvaranja nadtlaka) nakon čega se otvori B (s A zatvorenim). Koliko litara (tekućeg) dušika će isteći iz dewara? Uzmite da je na kraju procesa istjecanja (ponovno) razina tekućine u dewaru i cijevi 2 jednaka.

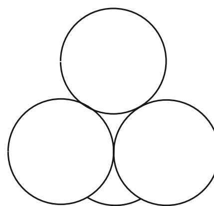
Napomena: Specifični toplinski kapacitet dušika c_{N2} smatrati konstantnim za čitavo vrijeme uspostavljanja termičke ravnoteže. Gustoću tekuće faze dušika također smatrati konstantnom. Isto tako, zanemarite promjenu temperature vrelišta tekućeg dušika zbog porasta tlaka plina iznad tekućine. Zadano je (primijetite da su veličine zadane za određenu količinu tvari): latentna toplina isparavanja tekućeg dušika $L = 5\,577\,\mathrm{J/mol}$, (molarna) gustoća tekuće faze dušika $\rho = 28\,847\,\mathrm{mol/m^3}$, specifični toplinski kapacitet $c_{N2} = 29.13\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, polumjer baze dewara (valjka) $r = 40$ cm, $H = 80$ cm, $H' = 75$ cm, $R = 8.314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$.

3. grupa

1. Čestica mase M sudara se elastično s mirnom česticom mase $m < M$. Nađi maksimalan mogući kut za koji se može otkloniti čestica koja se gibala prije sudara.

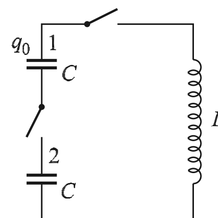
2. Arhitektica Marlen dobila je novi zadatak – mora napraviti skulpturu za travnjak na "Svjetskom sajmu". Skulptura mora biti načinjena od četiri identične, vrlo glatke metalne sfere, od kojih svaka teži $2\sqrt{6}$ tona. Sfere moraju biti postavljene kao na slici, s tri na horizontalnoj podlozi, tako da se sve tri dodiruju, a četvrta mora ležati slobodno na donje tri. Donje tri učvršćene su zajedno na mjestima kontakata. U specifikacijama je navedeno da je dozvoljen sigurnosni faktor 3. Pitanje koje muči Marlen je koliku napetost moraju izdržati vezni elementi na mjestima kontakata donjih kugli? Možeš li joj pomoći?



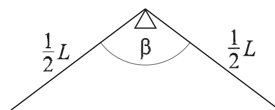


Napomena: Sigurnosni faktor 3 znači da vezni elementi moraju podnijeti silu tri puta veću od one koja stvarno djeluje na njih.

3. Strujni krug sastoji se od dva identična kondenzatora kapaciteta C i zavojnice induktiviteta L. Na početku su oba prekidača otvorena i prvi kondenzator nabijen je nabojem q_0. Drugi kondenzator nije nabijen. Zatim se oba prekidača istovremeno zatvore. Napiši izraze za struju i naboj u krugu, kao funkciju vremena.



4. Komad tanke žice duljine $L = 40$ cm savijen je pod kutom $\beta = 120^\circ$ i postavljen na brid prizme kao što je prikazano na slici. Odredi:



a) položaj centra mase savijene žice;

b) period oscilacija oko ravnotežnog položaja za male amplitude gibanja.

Uputa: za male kutove θ vrijedi $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx 0$.

4. grupa

1. Staklena boca unutarnjeg polumjera r i vanjskog R, napunjena je mlijekom. Indeks loma stakla je n_s, a mlijeka n_m. Koji odnos mora vrijediti između r i R da bi, gledajući sa strane, boca izgledala kao da je staklo debljine nula, to jest da se čini kao da mlijeko zauzima prostor od lijevog do desnog vanjskog ruba boce? Promotrite slučajeve $n_s > n_m$ i $n_s < n_m$.

2. Različiti izotopi istog elementa emitiraju svjetlost različitih valnih duljina. Jedna od valnih duljina u emisijskom spektru vodikova atoma je 656.45 nm, a za deuterij valna duljina istog prijelaza je 656.27 nm.

Koliko je zareza na rešetki potrebno da bi se ove dvije valne duljine razlučile u drugom redu difrakcije? Kao kriterij razlučivosti uzmi da se maksimum jedne valne duljine poklapa s najbližim minimumom druge. Ako rešetka ima 500 zareza po milimetru, izračunaj kutove i kutni razmak maksimuma drugog reda difrakcije ovih valnih duljina. Kutni razmak izračunajte na precizniji način nego iz razlike kutova. Na temelju Bohrova modela atoma objasni i računom potkrijepi zašto se ove valne duljine istog prijelaza kod vodika i deuterija ovoliko razlikuju.

3. Tipična nuklearna elektrana ima korisnost $1/3$ i proizvodi električnu snagu 1000 MW. Do fisije urana dolazi nakon što jezgra ^{235}U apsorbira spori neutron. Među fisijskim produktima pronađeno je preko 100 različitih nuklida. Napiši jednadžbu reakcije pri kojoj fisijom nastaje jezgra ^{140}Xe te osim druge jezgre nastaju i dva brza neutrona kinetičke energije 1 MeV. Zanemarivši početnu brzinu apsorbiranog neutrona izračunaj energiju oslobođenu u jednoj reakciji. Masa jezgre ^{235}U je $235.043923u$, jezgre ^{140}Xe $139.921636u$, a masa druge nastale jezgre $93.915360u$.

Nakon apsorpcije sporog neutrona (prije nego se dalje raspadne na navedeni način) jezgra ^{235}U se mijenja i postaje pobuđena. Kolika je energija pobuđenja novonastale jezgre ako je njena masa u osnovnom stanju $236.045562u$ i koja je to jezgra?

Jezgra ^{140}Xe nije stabilna, već se uzastopnim β^- raspadima prevodi do Ce. Napiši jednadžbe tih raspada. Nakon fisije svake jezgre ^{235}U oslobađa se još ukupno 15 MeV pri nizu ovih β^- rapada. Dok je fisiju jezgara ^{235}U moguće kontrolirati i zaustaviti ubacivanjem kontrolnih šipki koje apsorbiraju neutrone, ove β^- raspade nije moguće zaustaviti. Kolika se snaga oslobađa u trenutku nakon zaustavljanja fisije urana? Nemogućnost odvođenja tolike snage bila je uzrokom havarije nuklearke Otok tri milje 1979. godine. Kolika je godišnja potrošnja urana u tipičnoj nuklearnoj elektrani?

4. Za foton frekvencije ω_0 emitiran s površine zvijezde uočeno je da mu se frekvencija na vrlo velikoj udaljenosti od zvijezde promijeni za $\Delta\omega$. Kolika je masa zvijezde ako joj je polumjer R?

Objasni kako se može ustanoviti da je to promjena frekvencije baš određenog fotona, a ne da se pojavio neki drugi foton drugačije valne duljne.

Konstante: $u = 1.6605402 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js, $m_p = 1.007276u$, $m_n = 1.008665u$, $m_e = 0.000548580u$

Prilog: periodni sustav elemenata

1. grupa

Određivanje mase tijela

Pribor: kolica (2 kom), tijelo nepoznate mase, ravnalo, metar.

Zadatak: Odrediti masu tijela zadanim priborom.

a) opisati postupak određivanja mase i nacrtati sliku;

b) izvesti potrebne relacije;

c) izvršiti mjerenja i rezultate prikazati tablično;

d) odrediti srednju vrijednost pogreške.

Napomena: masa kolica zapisana je na kolicima.

2. grupa

Gustoća

Pribor: ravnalo s mjernom skalom, elastična opruga, kruto tijelo, čaša s vodom ($\rho_{\text{vode}} = 1000\,\text{kg/m}^3$), čaša s uljem.

Zadatak. Pomoć priloženog pribora treba odrediti gustoću danog krutog tijela i gustoću ulja.

a) Teorijski obrazložiti i skicirati postupak mjerenja.

b) Napraviti 5 mjerenja gustoće krutog tijela i odrediti srednju vrijednost (podatke prikazati tabelarno).

c) Napraviti pet mjerenja gustoće ulja i odrediti srednju vrijednost (podatke prikazati tabelarno).

3. grupa

Određivanje mase tijela

Pribor: valjak nepoznate mase (m_1), dva kvadra poznatih masa (m_2), podloga, ravnalo (ili pomična mjerka)

Zadatak: Odrediti masu valjka uporabom zadanih sredstava.

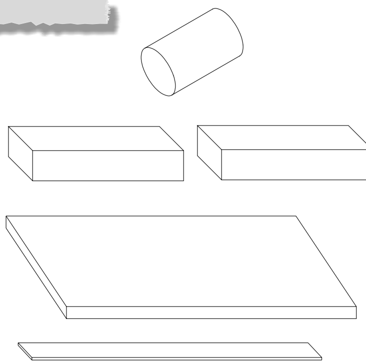
a) Opisati fizikalnu osnovu rješenja zadatka.

b) Izvesti potrebne relacije.

c) Nacrtati sliku.

d) Izvršiti potrebna mjerenja i odrediti masu valjka.

(za g uzeti $10\,\text{ms}^{-2}$)



4. grupa

Određivanje jakosti divergentne leće

Pribor: divergentna leća, trokut ili ravnalo, izvor svjetlosti – laser, plastelin za, učvršćivanje leće i zastora, stalak (kvadar) za laser

Zadatak:

a) Opisati postupak određivanja tražene veličine zadanim priborom.

b) Izvršiti mjerenja i prikazat ih tabelarno.

c) Provesti račun pogreške.

Krešo Zadro, Zagreb

Ljepota fizike[1] – posjet gimnaziji Frana Galovića u Koprivnici

Simon Cmrk, učenik 4. r., Koprivnica

Povodom obilježavanja Međunarodne godine fizike, u srijedu, 21. rujna koprivničku gimnaziju je posjetila grupa znanstvenika s Instituta za fiziku u Zagrebu kako bi pridonijela projektu Hrvatskog fizikalnog društva, "Ljepota fizike". Cilj ovog projekta je povećanje interesa i prihvaćanje fizike među učenicima srednjih škola, a ostvaruje se i posjetom znanstvenika s fakulteta i instituta školama diljem Hrvatske i predstavljanjem zanimljivih fizikalnih tema učenicima na jednostavan i izazovan način.

Tako smo prilikom posjete znanstvenika s Instituta za fiziku našoj školi slušali vrlo zanimljiva predavanja i promatrali niz fascinantnih pokusa iz fizike. Posjet je započeo uvodnim riječima dr. sc. Ane Smontare, a nastavio se predavanjem o svjetskoj godini fizike dipl. ing. Nikše Krstulovića. Predavanje je uključivalo upoznavanje sa životom Alberta Einsteina i ukratko s njegovim najvažnijim fizikalnim otkrićima, a kojih se 100. obljetnica njihovih objavljivanja slavi 2005. godine. Nakon kratkog odmora dr. sc. Đuro Drobac započeo je svoje predavanje na temu "Priča o magnetizmu". Sastojalo se od vrlo detaljnog povijesnog pregleda znanstvenih otkrića vezanih uz magnetizam, od najranijih početaka ljudske civilizacije, pa do najmodernijih otkrića današnjice. Predavanja su odisala kreativnošću, a izvedena su uz pomoć suvremene tehnologije, što je posebno obradovalo učenike, razbijajući njihove dotadašnje predodžbe o fizičarima. U sklopu predavanja o magnetizmu, na razrednoj katedri je izveden i niz atraktivnih popratnih pokusa, uključujući i one s tekućim dušikom, supravodljivim materijalima, te različitim vrstama magneta. Interakcija s učenicima je dosegla vrhunac na kraju ovog dvosatnog druženja, kada su učenici mogli postavljati pitanja te i sami sudjelovati u izvođenju nekih pokusa. Time je cilj ovog projekta, jačanje interesa učenika srednjih škola za fiziku i sve njene grane u potpunosti ostvaren, što je od iznimne važnosti zbog sveopćeg svjetskog problema rapidnog opadanja popularnosti fizike i sve manjeg odaziva učenika prirodoslovnim fakultetima kako je bilo istaknuto uvodnim riječima.

⋆⋆⋆

PAŽNJA! — STARI BROJEVI — U našem skladištu ima starih brojeva, i to: god. XVI, br. 4; god. XXXII, br. 3; god. XXXIII, br. 4; god. XXXIV, br. 3, 4; god. XXXV, br. 3; god. XXXVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XXXVII, br. 1, 4; god. XXXIX, br. 1, 2, 3, 4; god. XL, br. 2, 3, 4; god. XLI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLII, br. 3-4; god. XLIV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVIII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLIX, br. 1, 2, 3, 4; god. L, br. 1, 2, 3, 4; god. LI, br. 1, 2, 3, 4; god. LII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIV, br. 1, 2, 3, 4; god. LV, br. 1, 2, 3, 4.

Cijena pojedinog broja je 5 kuna.

Izvanredni broj (E) – zadaci iz matematike (cijena 20 kn); Izvanredni broj (F) – Rječnik matematičkih naziva – hrvatski, engleski, njemački (cijena 30 kn); Izvanredni broj (H) – zadaci iz matematike (cijena 25 kn).

[1] http://www.wyp2005.hr/ljepota_fizike/Festival_Ljepota_fizike.html

Međunarodno matematičko natjecanje, 27. turnir gradova, jesen 2005.

pripremni dio, 1. i 2. razred

1. Dan je trokut ABC. Točke M_1, M_2, i M_3 redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, a točke H_1, H_2, H_3 nožišta visina na te stranice iz vrhova C, A, B, redom. Dokažite da su dužine duljina $|H_1M_2|$, $|H_2M_3|$ i $|H_3M_1|$ stranice trokuta.

2. U svakom vrhu kocke zapisan je broj. U svakom koraku broj zapisan u svakom od vrhova kocke zamijenimo prosjekom triju brojeva koji se nalaze u susjednim vrhovima. Svi brojevi zamijene se istovremeno. Nakon 10 takvih koraka u svakom vrhu kocke nalazi se isti broj kao na početku. Da li su nužno svi početni brojevi bili međusobno jednaki?

3. Dužina jedinične duljine podijeljena je na 11 manjih dužina, od kojih nijedna nije dulja od a. Za koje vrijednosti a možemo zaključiti da su svake 3 od dobivenih 11 dužina stranice trokuta?

4. Šahovska figura kreće se prema sljedećim pravilima:

- može skočiti 8 ili 9 polja vertikalno ($\updownarrow$) ili horizontalno ($\leftrightarrow$);
- ni na jedno polje ne smije doći 2 puta.

Koliko najviše polja može obići ova šahovska figura na pločici 15×15 (figura može krenuti s bilo kojeg polja na ploči).

5. Dano je 6 novčića od kojih je jedan krivotvoren. (Masa krivotvorenog novčića razlikuje se od mase nekrivotvorenog, ali ništa drugo o njihovim masama nije poznato.) Dana je vaga koja pokazuje masu novčića koji se na njoj važu. Kako možemo naći krivotvoreni novčić u tri vaganja?

pripremni dio, 3. i 4. razred

1. Mogu li se između dvaju susjednih kvadrata pronaći dva različita kuba, tj. ima li nejednadžba

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$$

rješenje u skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$?

2. Zadana je dužina duljine $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Može li se, koristeći se samo neoznačenim ravnalom i šestarom konstruirati dužina duljine 1?

3. Isto kao i 5. zadatak za 1. i 2. razred.

4. Nad stranicama pravokutnog trokuta ABC konstruirani su kvadrati, a njihova središta označena su s D, E i F. Pokaži da je omjer površina trokuta DEF i trokuta ABC

(a) veći od 1;

(b) barem 2.

5. Kocka leži na ravnini i nekoliko puta je preokrenuta (preko svojih bridova nakon čega se ponovo nalazi na početnoj poziciji s istom stranom prema gore. Može li se dogoditi da je gornja strana zarotirana za 90° u odnosu na svoj početni položaj?

glavni dio, 1. i 2. razred

1. Za prirodni broj kažemo da je palindrom ako se čita jednako slijeva i zdesna (na primjer, brojevi 1, 343 i 2002 su palindromi, a 2005 nije). Da li je moguće naći 2005 parova oblika $(n, n+110)$ tako da su u svakom paru oba broja palindromi?

2. Produženi stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki K. Poznato je da je $|AD| = |BC|$. Neka su točke M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dokažite da je trokut MNK tupokutan.

3. Na svakom se polju šahovske ploče nalazi jedan top (kula). U bilo kojem trenutku smijemo maknuti jedan top koji napada neparan broj drugih topova. Koliki je maksimalni broj topova koje možemo maknuti? (Jedan top napada drugi ako se nalaze u istom retku ili stupcu i ako između njih nema ni jednog drugog topa.)

4. Dva mrava pomiču se duž ruba stola oblika mnogokuta. Sve stranice tog stola dulje su od 1 metra, a udaljenost između mrava uvijek je jednaka 10 cm. Na početku se oba mrava nalaze na istoj strani stola.

(a) Pretpostavimo da je stol konveksan. Mogu li se uvijek mravi kretati tako da na kraju svaki od njih dođe u svaku točku ruba stola barem jednom?

(b) Pretpostavimo da stol nije konveksan. Mogu li se uvijek mravi kretati tako da u svaku točku ruba stola dođe barem jedan mrav?

5. Pronađite najveći prirodan broj N za koji jednadžba

$$99x + 100y + 101z = N$$

ima jedinstveno rješenje (x, y, z) pri čemu su ovi brojevi prirodni.

6. Karlson (koji živi na tavanu) ima na raspolaganju 1 000 posuda marmelade. Posude nisu nužno jednake, ali nijedna ne sadrži više od jedne stotine ukupne količine marmelade. Za doručak Karlson može pojesti jednaku količinu marmelade iz bilo kojih 100 posuda koje odabere. Dokaži da Karlson može nakon nekoliko doručaka pojesti svu marmeladu.

glavni dio, 3. i 4. razred

1. Za koje n je moguće pronaći različite prirodne brojeve a_1, a_2,... a_n takve da je suma

$$a_1/a_2 + a_2/a_3 + \dots a_n/a_1$$

cijeli broj?

2. Isto kao 4. zadatak za 1. i 2. razred.

3. Isto kao 3. zadatak za 1. i 2. razred.

4. Nekoliko pozitivnih brojeva manjih ili jednakih 1 zapisano je na kružnici. Dokaži da se kružnica može podijeliti na tri kružna luka tako da se sume brojeva na bilo koja dva luka razlikuju za najviše 1. (Ako na kružnom luku nema brojeva, onda je suma jednaka nuli.)

5. U trokutu ABC, AA_1, BB_1, CC_1 su simetrale kutova. Poznato je da omjer veličina kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ iznosi $4:2:1$. Dokaži da je $|A_1B_1| = |A_1C_1|$.

6. Na ploču se u svakom trenutku smije ili zapisati dvije jedinice ili izbrisati dva ista broja n i zamijeniti ih s $n+1$ i $n-1$. Koliki je minimalni broj ovakvih operacija potreban da bi se na ploči pojavio broj 2005. (Na početku je ploča bila prazna.)

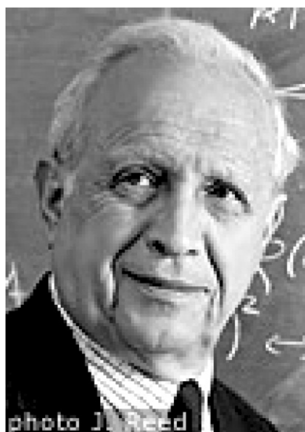
Opširnije o ovom natjecanju u sljedećem broju MFL-a.

Rudi Mrazović, Zagreb

Nobelova nagrada za fiziku 2005. godine – dodijeljena znanstvenicima u polju lasera i kvantne optike[1]

Nobelovu nagradu za fiziku ove godine dijele profesori *Roy J. Glauber* sa Sveučilšta Harvard (Cambridge, SAD) za teoretski opis ponašanja čestica svjetlosti, te *John L. Hall* sa Sveučilišta Colorado i Nacionalnog instituta za standarde i tehnologiju (Boulder, SAD) i njegov kolega *Theodor W. Hänsch* s Max-Planckovog instituta za kvantnu optiku u Garchingu i Sveučilišta Ludwig-Maximilians u Münchenu (Njemačka) za otkrića na području optike, odnosno za rad na primjeni kvantne fizike u optici.

Profesor Glauber je 1963. godine postavio temelje kvantnoj optici, prema kojima kvantna teorija obuhvaća i područje optike. On je pokazao kako se čestična priroda svjetlosti ponaša pod različitim okolnostima. Premda se takva stanja mogu rijetko vidjeti ili promatrati u prirodi, ona su važna za sofisticirane optičke instrumente.



Roy j. Glauber



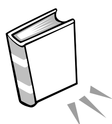
John L. Hall



Theodor W. Hänsch

Prof. Hall i prof. Hänsch primili su drugu polovinu nagrade za rad na razvoju spektroskopije na kojoj se temelji preciznost lasera. Oni su razvili postupak koji omogućuje iznimno precizno mjerenje vremena i udaljenosti uz korištenje lasera, te tehnika što su je razvili doprinosi razvoju i izradi iznimno točnih satova i unapređenju GPS tehnologije.

[1] Više o otkrićima za koja je dodijeljena ovogodišnja Nobelova nagrada iz fizike možete pročitati na adresi http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/index.html, te najavljujemo o tome opširniji članak u narednom broju MLF-a.



NOVE KNJIGE

Vladis Vujnović, Rječnik astronomije i fizike svemirskog prostora, Školska knjiga, Zagreb, 2004.



Rječnik astronomije i fizike svemirskog prostora izdala je Školska knjiga u Zagrebu prošle godine. Vladis Vujnović je redoviti profesor na Geofizičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu, priznati znanstvenik i pedagog te autor niza udžbenika i priručnika iz astronomije i astrofizike.

Rječnik sadrži gotovo tri tisuće pojmova na 192 stranice s prijevodom termina s hrvatskog na engleski jezik, englesko–hrvatskim abecedarijem te dodacima poput popisa astronoma u Hrvata i popisa zviježđa s hrvatskim i latinskim imenima.

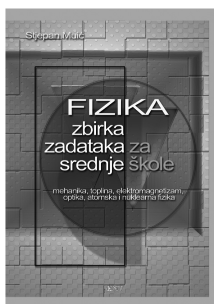
Autorova namjera nije bila napisati leksikon nego rječnik, no mnoge su natuknice, poradi pouke, iscrpnije, pa se knjiga može koristiti i kao leksikon. Namijenjena je svima koji su u doticaju s astronomijom: prirodoslovcima, inženjerima, nastavnicima, učenicima, studentima, novinarima, prevoditeljima i televizijskim djelatnicima.

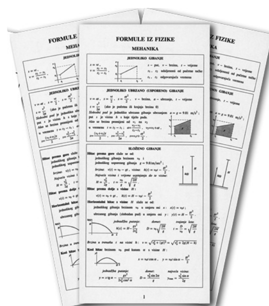
Svi koji o astronomiji pišu na hrvatskom jeziku napokon mogu pronaći odgovarajuće hrvatske nazive koji su danas prevladali u struci (npr. *galaktika i crna rupa* umjesto galaksija i crna jama) ili pak odgovarajuće hrvatske prijevode pojedinih engleskih termina (npr. *bljesak i provala* za flare i burst).

Važnost terminološkog rječnika za pojedinu struku je neupitna. S obzirom na astronomsku tradiciju u Hrvatskoj, upravo je nevjerojatno da se *prvi sveobuhvatni astronomski rječnik na hrvatskom jeziku* pojavio tek 2004. godine[1]. Stoga je ova knjiga profesora Vujnovića izuzetno djelo koje će se naširoko koristiti još dugi niz godina.

Dario Hrupec, Koprivnica

Stjepan Muić, FIZIKA, zbirka zadataka za srednje škole, Element, Zagreb, 2005.





Stjepan Muić, profesor je fizike na Srednjoj strukovnoj školi u Velikoj Gorici. Svoj dugogodišnji kvalitetan rad s učenicima okrunio je priređivanjem knjige *FIZIKA – zbirke zadataka za srednje škole.*

Knjiga je podijeljena u pet cijelina (*mehanika, toplina, elektromagnetizam, optika, atomska i nuklearna fizika*) i dvadesetčetiri poglavlja, te sadrži oko tisuću zadataka za rješavanje. Nakon uvodnog dijela s kratkim opisom gradiva i nekoliko detaljno riješenih primjera u svakoj cjelini, slijede zadaci za rješavanje i na kraju se nalaze rješenja svih zadataka. Zbirka

[1] Godine 2001. izašao je *Astronomski rječnik* Dragana Roše, ali samo kao tematski broj biltena Bolid, astronomskog godišnjaka Zvjezdarnice Zagreb.

obuhvaća sveukupno gradivo srednjoškolske fizike i namijenjena je učenicima srednjih škola u redovnoj nastavi, za pripreme matura, natjecanja i prijemnih ispita, a dijelom i studentima prve godine fakulteta, viših škola i veleučilišta, gdje je fizika kolegij od jednog ili dva semestra, a u zbirci se nalaze i zadaci koji ne dolaze u redovnoj školskoj nastavi. Zbirka također sadrži i određen broj različitih zadataka i primjera iz tehničke i svakodnevne prakse, primjer su zadaci iz fotometrije.

Stoga će knjiga poslužiti učenicima i studentima, ali će dobro doći i nastavnicima kao pomoć u izboru dodatnih zadataka u svim razredima srednjih škola. Zbirku je izdala izdavačka kuća ELEMENT d.o.o., Menčetićeva 2, 10 000 Zagreb, tel. (01) 6008 799, e-mail: `element@element.hr`, gdje se i može nabaviti.

Ana Smontara, Institut za fiziku, Zagreb

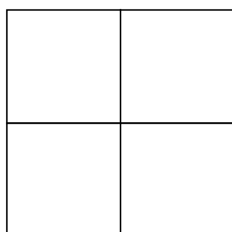
⋆⋆⋆

Kako podijeliti kvadrat na manje kvadrate?

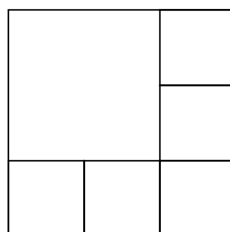
Da li se kvadrat može podijeliti na n, $n \geqslant 2$ manjih kvadrata? Za $n = 2, 3, 5$ to nije moguće, dok za $n = 4$ ili $n \geq 6$ jest. Za $n = 4$ podijelimo kvadrat na 4 manja sukladna kvadrata. Sada je dovoljno pokazati da je to moguće za $n = 6, 7, 8$ jer je

$$6 \equiv 0 \pmod 3, \quad 7 \equiv 1 \pmod 3, \quad 8 \equiv 2 \pmod 3.$$

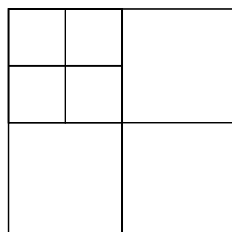
Ako sada jedan kvadrat podijelimo na četiri kongruentna kvadrata, njihov broj se poveća za 3.



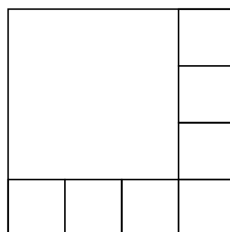
$n = 4$



$n = 6 + 3k \equiv 0 \pmod 3$



$n = 7 + 3k \equiv 1 \pmod 3$



$n = 8 + 3k \equiv 2 \pmod 3$



KVALIFIKACIJSKI ISPITI

Zadaci s prijemnog ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva uZagrebu

Kao dio razredbenog postupka u prvom upisnom roku, 12. srpnja 2005. godine održan je test provjere znanja na Fakultetu elektronike i računarstva u Zagrebu. Uz dozvolu ove institucije, donosimo zadatke koji su bili zadani na tom testu.

⋆⋆⋆

M-1. Livadu treba pokositi za 3 dana. Prvi dan je osam kosaca pokosilo dvije trećine livade. Trećeg dana kosit će samo jedan kosac. Koliko kosaca treba kositi drugi dan, da bi se cijela livada pokosila?
A. 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3 **E.** 2

M-2. Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+3}{3x-2}$, onda je $f^{-1}(x)$ jednako
A. $\frac{3x-2}{2x+3}$ **B.** $\frac{x+1}{x-1}$ **C.** $\frac{2x+3}{3x+1}$ **D.** $\frac{2x+1}{x+1}$ **E.** $\frac{x+1}{3x+2}$

M-3. Neka je $x^2=1+x$. Ako je $x^{10}=a+bx$, onda je $a+b$ jednako
A. 85 **B.** 86 **C.** 87 **D.** 88 **E.** 89

M-4. Ako su nultočke polinoma $q(x)=x^2-3x-4$ ujedno i nultočke polinoma $p(x)=x^4-Ax^3+Bx^2-2x-3$, onda $p(2)$ iznosi
A. $-\frac{111}{4}$ **B.** $\frac{73}{2}$ **C.** $-\frac{31}{6}$ **D.** $\frac{32}{5}$ **E.** -1

M-5. Zbroj svih prirodnih brojeva n koji zadovoljavaju nejednadžbu $n^2-910n+9000\leqslant 0$ iznosi
A. 400455 **B.** 405405 **C.** 405540 **D.** 540450 **E.** 505440

M-6. Modul kompleksnog broja $z\neq 0$ koji zadovoljava uvjete $|z+1|=|z+i|=1$ iznosi
A. 1 **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{2}$ **E.** $\sqrt{3}$

M-7. Koliko je $\frac{1}{x^2}\sqrt{x^3\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x^8}}}+\frac{11\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-8}-\frac{24}{\sqrt{3}}$?
A. $12+x^2$ **B.** $\frac{1}{x^2}+8$ **C.** 13 **D.** $\frac{1}{x}+2$ **E.** 16

M-8. Zbroj svih rješenja jednadžbe $|x-2|^{x^2-9x+20}=1$ jednak je
A. 7 **B.** 13 **C.** -9 **D.** 20 **E.** 2

M-9. Zbroj svih rješenja jednadžbe $\log^4 x-5\log^2 x+4=0$ je
A. 11.11 **B.** 111.1 **C.** 111.01 **D.** 110.11 **E.** 101.11

M-10. Visine trokuta su 2, 3 i 4, a najdulja stranica 5. Opseg trokuta je
A. $\frac{65}{6}$ **B.** $\frac{25}{2}$ **C.** $\frac{28}{3}$ **D.** $\frac{85}{7}$ **E.** $\frac{95}{8}$

M-11. U rombu stranice duljine a veća dijagonala je 5 puta dulja od manje. Površina romba iznosi

A. $\frac{19}{25}a^2$ **B.** $\frac{a^2}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}a^2$ **D.** $\frac{13}{19}a^2$ **E.** $\frac{5}{13}a^2$

M-12. Površina trapeza s osnovicama duljina $a = 32$ i $c = 18$, te krakovima duljina $b = 15$ i $d = 13$ iznosi

A. 296 **B.** 300 **C.** 312 **D.** 326 **E.** 336

M-13. Kada se uspravnom stošcu volumena 12π razreže plašt po izvodnici, dobiva se kružni isječak središnjeg kuta $\frac{6\pi}{5}$. Duljina izvodnice tog stošca jednaka je

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** $\sqrt{10}$ **E.** $\sqrt{17}$

M-14. Iz točke T izvan kružnice spuštene su tangente na kružnicu polumjera $R = 3$. Četverokut koji omeđuju te tangente i oba radijusa u njihovim diralištima ima površinu $P = 12$. Koliko je točka T udaljena od kružnice?

A. 1 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** 3 **E.** $2\sqrt{3}$

M-15. Iz točke T kružnice polumjera $\sqrt{2}$ povučene su tetive $\overline{TA}$ i $\overline{TB}$, tako da je kut $\sphericalangle ATB = 60^\circ$. Ako je $|TA| = 2$, onda je $|TB|$ jednako

A. $5 - \sqrt{5}$ **B.** 2.75 **C.** $3\sqrt{2} - 2$ **D.** $1 + \sqrt{3}$ **E.** 2.5

M-16. Kocka duljine brida 3 cm i uspravna četverostrana piramida imaju zajedničku osnovku i jednake volumene. Koliki je volumen dijela piramide koji se nalazi izvan kocke?

A. 6 cm^3 **B.** 27 cm^3 **C.** 8 cm^3 **D.** 64 cm^3 **E.** 125 cm^3

M-17. Polovište visine pravilnog tetraedra spojeno je s dva vrha osnovke. Kut između tih spojnica iznosi

A. $\frac{3\pi}{4}$ **B.** $\frac{2\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{3}$ **E.** $\frac{\pi}{4}$

M-18. Ako za kut $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ vrijedi $\cos\alpha = \frac{7}{18}$, onda je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ jednak

A. $\sqrt{3}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$ **E.** $-\frac{\sqrt{11}}{5}$

M-19. Koliko rješenja u intervalu $[0, 2\pi]$ ima jednadžba $\cos 4x - \cos 2x = \sin 4x + \sin 2x$?

A. 9 **B.** 11 **C.** 7 **D.** 6 **E.** 5

M-20. Točke $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ i $C(1, 6)$ vrhovi su paralelograma $ABCD$. Zbroj koordinata vrha D je

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8 **E.** 9

M-21. Polumjer opisane kružnice trokuta kojeg zatvara pravac $3x - 4y + 24 = 0$ s koordinatnim osima iznosi

A. 5 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{5}$ **E.** 6

M-22. Koliko od ishodišta mora biti udaljena točka na x-osi iz koje se elipsa $8x^2 + 9y^2 = 72$ vidi pod kutom od 60°?

A. $\sqrt{33}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{31}$ **D.** $4\sqrt{2}$ **E.** $2\sqrt{7}$

M-23. Ako točka $T(4, 4)$ leži na hiperboli kojoj su asimptote $y = \pm 2x$, onda je linearni ekscentricitet hiperbole jednak

A. 60 **B.** $\sqrt{15}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $4\sqrt{15}$ **E.** $2\sqrt{15}$

M-24. Pravac $y = 4x + b$ je tangenta parabole $y = 2x^2 + 1$ ako je b jednak

A. $-\frac{3}{2}$ **B.** -2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{2}{3}$ **E.** -1

F-25. Svjetlost natrijeve lampe ($\lambda = 589$ nm) obasjava dvije pukotine. Na zaslonu paralelnom s pukotinama, udaljenom 0.8 m od njih, formira se interferentna slika sa svijetlim prugama međusobno udaljenim 3.5 mm. Koliki je razmak među pukotinama?
A. 0.115 mm **B.** 0.195 mm **C.** 0.175 mm **D.** 0.135 mm **E.** 0.155 mm

F-26. Zrak u automobilskoj gumi nalazi se pod tlakom od 10^5 Pa, pri temperaturi od 7 ℃. Prilikom brze vožnje po autoputu guma se zagrije i temperatura zraka naraste na 47 ℃. Koliki je tada tlak zraka u gumi, ako njen volumen ostaje nepromijenjen?
A. 1.62 bar **B.** 1.73 bar **C.** 1.14 bar **D.** 1.21 bar **E.** 1.97 bar

F-27. Koliko je puta Newtonova gravitacijska sila između dva protona u vakuumu manja od Coulombske odbojne sile između njih, ako razmak između središta dvaju protona iznosi 10^{-14} m? (Masa protona je $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg, naboj protona je brojčano jednak naboju elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, Newtonova opća gravitacijska konstanta $G_N = 6.673 \cdot 10^{-11} \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$, dielektrična konstanta vakuuma $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m.)
A. $1.24 \cdot 10^{36}$ **B.** 1 **C.** $1.24 \cdot 10^{34}$ **D.** $3 \cdot 10^8$ **E.** $6.626 \cdot 10^{34}$

F-28. Elektroni izbijeni iz nekog materijala fotonima zaustavljaju se potpuno kad se primijeni napon zaustavljanja od 4.5 V. Kolika je frekvencija fotona koji izbijaju elektrone iz tog materijala, ako je prag fotoelektričnog efekta za taj materijal na valnoj duljini od 300 nm? (Planckova konstanta $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js, brzina svjetlosti $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, naboj elektrona $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C)
A. $1.50 \cdot 10^{15}$ Hz **B.** 10^{15} Hz **C.** $2.09 \cdot 10^{15}$ Hz **D.** $1.05 \cdot 10^{15}$ Hz **E.** $7 \cdot 10^{14}$ Hz

F-29. Pod kojim kutom prema horizontalnoj ravnini treba izbaciti tijelo da bi njegov domet bio jednak najvećoj visini koju tijelo dostigne?
A. 45° **B.** 76° **C.** 63° **D.** 90° **E.** 14°

F-30. Kvadratni vodič stranice $a = 20$ cm postavljen je okomito na silnice homogenog magnetskog polja indukcije $B = 0.1$ T. Kolika će biti inducirana elektromotorna sila u vodiču ako magnetska indukcija opadne jednoliko za 50% tijekom 10 ms?
A. 1.0 V **B.** 0.2 V **C.** 0.4 V **D.** 0.5 V **E.** 0.1 V

F-31. Tijelo mase m objesi se na oprugu i zatitra. Ako se tijelu mase m poveća masa za Δm, period titranja jednak je 0.9 s, a kada se tijelu mase m smanji masa za Δm, period je 0.5 s. Koliki je period titranja tijela mase m?
A. 0.33 s **B.** 0.73 s **C.** 0.70 s **D.** 0.84 s **E.** 0.51 s

F-32. Ravno zrcalo udaljeno je od tjemena udubljenog sfernog zrcala $3R$, gdje je R polumjer zakrivljenosti sfernog zrcala. Svijetli predmet nalazi se u polovištu dužine, koja je okomita na ravno zrcalo i spaja tjeme udubljenog sfernog zrcala s najbližom točkom ravnog zrcala. Koliki je razmak između slike dobijene sfernim zrcalom i slike dobijene ravnim zrcalom?
A. $3R/4$ **B.** $9R/4$ **C.** $7R/4$ **D.** $21R/4$ **E.** $15R/4$

F-33. U nekom vodiču jakost struje je konstantna tijekom 10 s i iznosi 1.5 A. Kolika količina naboja protekne za to vrijeme kroz poprečni presjek tog vodiča?
A. 30 C **B.** 10 C **C.** 15 C **D.** 300 C **E.** 90 C

F-34. Koliko će dublje uroniti drvena kocka brida 1 m u slatkoj vodi nego u morskoj vodi? Gustoća drveta je 600 kg/m^3, morske vode 1020 kg/m^3, a slatke vode 1000 kg/m^3.
A. 0.1 m **B.** 0.05 m **C.** 0.2 m **D.** 0.01 m **E.** 0.07 m

F-35. Helikopter leti visoko u zraku. U određenom trenutku počinje se uspinjati konstantnom brzinom od 8.76 m/s vertikalno uvis. Tijekom uspinjanja iz helikoptera je ispušten pojas za spašavanje. Na kojoj udaljenosti od helikoptera se nalazi pojas za spašavanje 3.05 sekundi kasnije? ($g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$)
A. 45.6 m **B.** 18.9 m **C.** 7.8 m **D.** 72.6 m **E.** 65.2 m

F-36. Tri otpornika u paralelnom spoju imaju otpore 330 Ω, 100 Ω i 220 Ω. Kad je kombinacija spojena preko baterije, struja u otporniku od 100 Ω iznosi 0.12 A. Kolika se snaga razvije u otporniku od 330 Ω?
A. 0.02 W **B.** 0.1 W **C.** 0.44 W **D.** 0.55 W **E.** 0.66 W

F-37. S tornja visokog 21 m slobodno pada kugla mase m. Na 2/3 visine tornja ona se neelastično sudari s mirnom kuglom iste mase i zatim zajedno nastave padati. Koliko treba vremena kuglama da nakon spajanja padnu na zemlju? ($g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$)
A. 11.5 s **B.** 1.19 s **C.** 0.65 s **D.** 5.7 s **E.** 2.31 s

F-38. Ako se krajevi zavojnice spoje s izvorom istosmjerne struje, kroz nju teče struja od 0.3 A, a napon na krajevima zavojnice je 60 V. Koliki je induktivitet zavojnice ako se nakon priključenja na izvor izmjenične struje frekvencije 50 Hz struja kroz zavojnicu poveća na 1 A, a napon na krajevima zavojnice na 320 V?
A. 0.8 H **B.** 8 H **C.** 0.008 H **D.** 200 H **E.** 0.3 H

F-39. U 30 kg vode temperature 70 ℃ otopi se 8 kg leda temperature 0 ℃. Kolika je temperatura smjese nakon otapanja leda ako je specifična toplina taljenja leda 335 kJ/kg, a specifični toplinski kapacitet vode iznosi 4.19 kJ/(kgK)? Gubitke topline u okolinu valja zanemariti.
A. 20.8 ℃ **B.** 48.2 ℃ **C.** 51.6 ℃ **D.** 27.5 ℃ **E.** 38.4 ℃

F-40. Da bi se tijelo mase 11 kg gibalo jednoliko po horizontalnoj podlozi potrebno je na njega djelovati horizontalnom silom od 3 N. Koliki je faktor trenja između tijela i podloge? ($g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$)
A. 0.101 **B.** 0.073 **C.** 0.055 **D.** 0.028 **E.** 0.015

Rješenja zadataka

M–1	D	M–2	A	M–3	E	M–4	A
M–5	B	M–6	D	M–7	E	M–8	B
M–9	D	M–10	A	M–11	E	M–12	B
M–13	A	M–14	C	M–15	D	M–16	C
M–17	C	M–18	E	M–19	A	M–20	D
M–21	A	M–22	A	M–23	E	M–24	E
F–25	D	F–26	C	F–27	A	F–28	C
F–29	B	F–30	B	F–31	B	F–32	E
F–33	C	F–34	D	F–35	A	F–36	C
F–37	B	F–38	A	F–39	E	F–40	D



Bridž se igra sa špilom od 52 karte. Karte su poredane po jačini ovako A, K, Q, J, 10, 9, itd do 2. Kad se odigra prva karta u nekom štihu, ostali igrači moraju dodati kartu iste boje, ukoliko je posjeduju, ali ne moraju igrati višu kartu od odigrane. Ukoliko ne posjeduju boju, mogu odigrati bilo koju kartu iz svoje ruke (ne moraju rezati u adutskom kontraktu).

Dvije su vrste kontrakta: bezadutski, gdje su sve boje ravnopravne, te adutski, u kojem je jedna boja jača od preostalih. Svi primjeri koje danas spomenemo, odnosit će se na bezadutsku igru.

Štih osvaja najjača karta u boji kojom je započet štih. Tako na primjer, ako su u štihu odigrane karte ♢8 – ♢9 – ♠Q – ♢4, tada štih osvaja ♢9.

Za vrijeme igre izvođač vidi svojih 13 karata, kao i karte njegovog partnera koje su izložene na stolu. On između nekoliko mogućnosti bira onu koja mu daje najveću matematičku šansu uspjeha, uzimajući u obzir moguće vjerojatnosti za raspodjelu preostalih karata u protivničkim rukama.

Primjer. Izvođač posjeduje u svojoj ruci i u kartama na stolu 7 sljedećih karata:

♡ 4 3 2

stol
izvođač

♡ A K Q 5

Koliko štihova on može osvojiti?

Nesumljivo, minimalni broj je 3, jer posjeduje tri najjače karte u ovoj boji. Što će se dogoditi nakon treće runde? To ovisi o razdiobi karata u protivničkim rukama. Ako su one raspoređene 3–3, tad će nakon tri runde preostati samo jedna karta u ovoj boji, ♡5 i ona će uzeti četvrti štih. Kolika je vjerojatnost tog događaja?

Odgovor na to pitanje daje Tablica 2, u kojoj je dana vjerojatnost distribucije nedostajućih karata u protivničke dvije ruke. Tako na primjer, vjerojatnost distribucije 3–3 je, prema ovoj tablici, 35.6%.

Broj 20 u trećem stupcu govori da postoji 20 načina na koje nedostajućih 6 karata mogu biti raspoređene u preostale dvije ruke. Na primjer, jedna je mogućnost: J 8 7 – 10 9 6. Naime, taj je broj jednak $\binom{6}{3}$.

Tablica 2.

2 karte			**3 karte**		
1-1	52%	(2)	2-1	78%	(6)
2-0	48%	(2)	3-0	22%	(2)
4 karte			**5 karata**		
3-1	49.7%	(8)	3-2	67.8%	(20)
2-2	40.7%	(6)	4-1	28.3%	(10)
4-0	9.6%	(2)	5-0	3.9%	(2)
6 karata			**7 karata**		
4-2	48.5%	(30)	4-3	62.2%	(70)
3-3	35.6%	(20)	5-2	30.5%	(42)
5-1	14.4%	(12)	6-1	6.8%	(14)
6-0	1.5%	(2)	7-0	0.5%	(2)

Primjer. Koliko će štihova osvojiti igrač koji u boji posjeduje karte:

5 4 3 2 — A K 8 7 6

Odgovor: pet s vjerojatnošću 40.7%, četiri s vjerojatnošću 49.7%, te tri s vjerojatnošću 9.6%.

1. Opravdaj podatke u tablici 2. (Uputa: Ako nedostaju dvije karte u nekoj boji, tad je vjerojatnost razdiobe 1–1 jednaka:

$$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} = 0.52$$

Izvedi račun za sve ostale kombinacije.)

2. Koliko štihova i s kojom vjerojatnošću se može osvojiti s kartama:

A K Q 6 5 — 4 3 2 ?

3. Izvođač ima kombinaciju:

6 5 4 3 — A K J 10 9

Kako treba igrati ako želi osvojiti svih pet štihova? Kolika je vjerojatnost toga? (Odgovor: 57.9%. Do toga se dolazi zbrajanjem: $40.7\% + \frac{1}{2}\cdot 9.6\% + \frac{1}{4}\cdot 49.7\%$. Objasni račun i kako treba odigrati.)

4. Izvođač ima kombinaciju:

5 4 3 2— A K J 10

Kako treba igrati ako želi osvojiti sve štihove? Kolika je vjerojatnost toga? (Odgovor: $52.8\% = 50\% + \frac{1}{10}\cdot 28.3\%$. Objasni račun i način igre.)

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 171

Rješenje.

$$\sphericalangle HAJ = 45^\circ,$$

pa je

$$|AB| = \left(\sqrt{2}+1\right)|AI|.$$

Dakle,

$$|AI| = \left(\sqrt{2}-1\right)|AB|.$$

Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:

1. *Nikolina Artić* (2), Srednja škola "Krapina", Krapina; 2. *Ervin Duraković* (2), Gimnazija Andrije Mohorovčića, Rijeka; 3. *Marko Hajba* (3), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica; 4. *Martina Jurin* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik; 5. *Antonio Krnjak* (2), Gimnazija "Čakovec", Čakovec. 6. *Marin Mišur* (2), Gimnazija "Metković", Metković. 7. *Goran Šeketa* (1), Gimnazija "Karlovac", Karlovac. 8. *Marina Škaričić* (4), IV. gimnazija Marka Marulića, Split. 9. *Tihana Zajc* (1), Pazinski kolegij – klasična gimnazija, Pazin.

Riješili zadatke iz br. 4/220

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Marko Čolić* (2), III. gimnazija, Osijek, 2937, 2938, 2942; *Mirko Ćorić* (3), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 2938, 2939, 2941, 2943, 3944; *Ervin Duraković* (3), Gimnazija Andrije Mohorovčića, Rijeka, 2937, 2938, 2943, 2946, 2950; *Marko Hajba* (3), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 2938; *Antonio Krnjak* (3), Gimnazija "Čakovec", Čakovec, 2937–2939, 2943–2946, 2950; *Marin Mišur* (2), Gimnazija "Metković", Metković, 2937, 2938; *Goran Šeketa* (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac, 2937; *Marina Škaričić* (4), IV. gimnazija Marka Marulića, Split, 2937, 2938;

b) Iz fizike: *Marina Furkes* (2), Gimnazija Frana Galovića, Koprivnica, 232; *Marko Čolić* (2), III. gimnazija, Osijek, 1308, 1310; *Marko Hajba* (3), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1310; *Martina Jurin* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1309; *Mislav Kovačić* (4), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1308–1310; *Zorana Matić* (1), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1308; *Marin Mišur* (3), Gimnazija "Metković", Metković, 1308–1310.

Nagradni natječaj br. 173

Ako su x_1, x_2, ..., x_7 realni brojevi takvi da vrijedi:

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1,$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12,$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123,$$

odredi vrijednost zbroja

$$S = 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7.$$

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2005./2006. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/III, 10001 Zagreb,
tel./fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
**Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.**
URL: http://www.math.hr/mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Slika na naslovnici ovog broja prikazuje matematičke kreacije kocke i tetraedra dipl. inž. strojarstva Josipa Kovačevića;
http://free-zg.htnet.hr/pamet/

Dragi čitatelji!

Prošla godina je bila u znaku fizike, a ova će biti u znaku Nikole Telse, svjetski poznatog istraživača i fizičara. O tome će biti nekoliko priloga u sljedećim brojevima lista.

I u ovom broju ima niz zanimljivih priloga iz fizike, matematike i astronomije. Albert Einstein, kojeg smo često spominjali u zadnjim brojevima Matematičko-fizičkog lista, dao je velik doprinos istraživanju Brownovog gibanja, o čemu nas upoznaju Sintija Tropper i Gordana Bilalbegović s Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Rijeci u prilogu *Brownovi i molekularni strojevi.* Ako razmišljamo o svemirskim putovanjima voljeli bismo da su moguće i brzine veće od 300 tisuća km/s, tj. od brzine svjetlosi u vakuumu. No iz Einsteinove teorije relativnosti proizlazi da to nije moguće. O tome kako se svjetlost može usporiti do zemaljskih brzina i njezinoj primjeni, možemo saznati u članku *Spora svjetlost* Hrvoja Skenderovića s Instituta za fiziku u Zagrebu. O prošlogodišnjim dobitnicima Nobelove nagrade za fiziku i njihovom znanstvenom doprinosu upoznaje nas Goran Pichler s Instituta za fiziku u Zagrebu.

Naš poznati matematičar, Danilo Blanuša, o kojem smo prošle godine pisali u ovom listu, objavio je 1943. godine članak na njemačkom jeziku, *Karl Friedrich Gauss, najveći matematički genij svih vremena*, u novinama "Neue Ordnung". S obzirom da je on jedan od dva najveća matematičara objavljujemo tekst u prijevodu Maria-Osvin Pavčevića. Znamo što je kugla u tri dimenzije i formulu za njezin volumen. O tome što je kugla u jednoj, dvije, četiri i više dimenzija i kako se određuje njezin volumen možemo saznati u prilogu *Višedimenzionalne kugle,* Josipa Matejaša s Ekonomskog fakulteta u Zagrebu. Tokom nekoliko prošlih godina Luka Neralić s Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, objavio je tri priloga o linearnom programiranju, a u ovom broju je nastavak.

U rubrici Iz moje radionice i laboratorija Maja Planinić s Fizičkog odsjeka prirodoslovno-matematičkog fakulteta upoznaje nas *Kako nastaje uzgon.* Ettore Tamajo s istog fakulteta piše o *Porijeklu magnetskog polja kod kemijski neobičnih zvijezda* u rubrici Astronomija.

Sredinom ožujka održavat će se natjecanje "Klokan bez granica 2006." koje obuhvaća velik broj učenika osnovne i srednje škole. Tog dana u Europi će se natjecati preko milijun učenika. Zadatke koje su rješavali učenici drugih, trećih i četvrtih razreda srednjih škola prošle godine, objavljujemo u ovom broju. U okviru godine fizike bio je organiziran Tjedan fizike 2005. na kojem su sudjelovali i učenici iz Šibenika, o čemu na zanimljiv način piše učenica Marija Perkov iz Gimnazije Antuna Vrančića. U rubrici Novosti iz znanosti Matko Milin s Instituta "Ruđer Bošković" piše o otkriću desetog planeta u Sunčevom sustavu.

Na posljednjoj strani omota prisjetili smo se Stanka Hondla, redovitog profesora fizike na Sveučilištu u Zagrebu i iznimnog popularizatora znanosti, koji je pored svog plodnog znanstvenog rada napisao i niz srednjoškolskih udžbenika.

Uredništvo lista

FIZIKA

Brownovi i molekularni strojevi

Sintija Tropper[1] *i Goranka Bilalbegović*[2], *Rijeka*

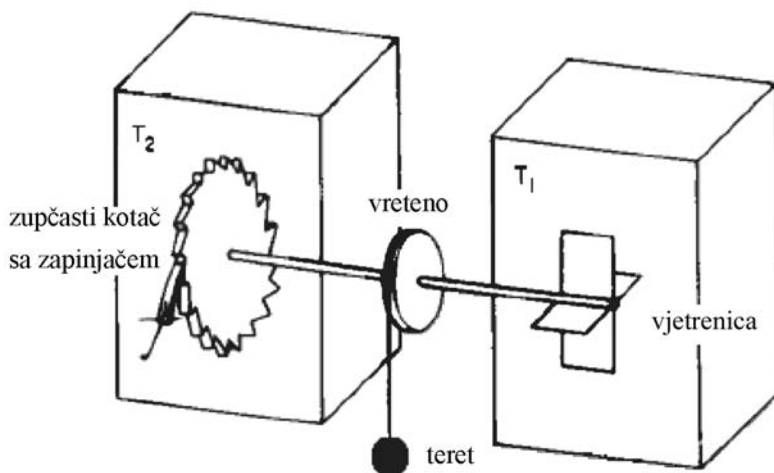
Brownovo gibanje je pojava nasumičnog kretanja vrlo malih čestica u fluidu [1,2]. Uzrok pojave su nasumični sudari tih malih (tzv. Brownovih) čestica i molekula fluida. Povijest istraživanja Brownovog gibanja počinje 1827. godine kada je škotski botaničar Robert Brown, koristeći mikroskop, promatrao pojavu nasumičnog gibanja zrnaca peluda u vodi. Albert Einstein je teorijski objasnio Brownovo gibanje, a njegov članak je objavljen 1905. godine u časopisu *"Annalen der Physik"*. Einsteinov doprinos u istraživanju Brownovog gibanja jedan je od razloga za proglašavanje 2005. svjetskom godinom fizike. U suvremenoj znanosti pojam Brownovo gibanje ne odnosi se samo na fizikalnu pojavu, već i na matematički model kojim se opisuju neki slučajni procesi. Poznate su primjene modela Brownovog gibanja u mnogim znanstvenim područjima, npr. u ekonomiji [3], biologiji, medicini, geologiji, astronomiji i ekologiji.

Postavlja se pitanje da li je moguće nasumično gibanje čestica upotrijebiti za dobivanje korisnog rada, odnosno, mogu li se Brownove čestice i pod kojim uvjetima gibati usmjereno. Uređaje s ovakvim kontroliranim gibanjem zovemo Brownovi strojevi. Za Brownove čestice koje se gibaju u uvjetima termodinamičke ravnoteže takvi procesi nisu mogući. Ravnoteža se mora narušiti vanjskom silom tj. vanjskim potencijalom koji je asimetričan i periodičan da bi se kaotično gibanje Brownovih čestica moglo kontrolirati. O ideji za uređaj u kome bi se Brownove čestice moglo upotrijebiti za dobivanje usmjerenog gibanja može se čitati u poznatoj knjizi Richarda Feynmana [4]. Uređaj je prikazan na slici 1, a sastoji se od dva spremnika ispunjena plinom. U jednom od njih nalazi se vjetrenica fiksirana na osovinu koja se može okretati. Drugi kraj osovine nalazi se u drugom spremniku, a na njega je nataknut *ratchet* i *pawl* mehanizam (engl. *ratchet* – zupčanik, zupčasti kotač, kotač s asimetričnim zupcima na rubu; *pawl* – zapinjač, zaporka), odnosno zupčasti kotač sa zapinjačem. Pod utjecajem bombardiranja molekulama plina koji je okružuju vjetrenica se može okretati ravnopravno u oba smjera. No osovina na koju je vjetrenica pričvršćena ne dopušta okretanje u jednom smjeru, a zakočni mehanizam je zupčasti kotač sa zapinjačem. Zbog asimetričnosti zubaca potrebno je puno više energije da bi se kotač okrenuo u jednom, nego u drugom smjeru. Tako konstruiran uređaj s mehanizmom koji se može okretati samo u jednom smjeru mogao bi podizati teret ovješen o nit koja je namotana na vreteno po sredini osovine. Neki ljudi su zaključili da, kada se plinovi u oba spremnika nalaze na jednakoj temperaturi, uređaj, protivno drugom zakonu termodinamike, može vršiti mehanički rad. To bi značilo da je takav stroj *perpetuum mobile* druge vrste. Feynman je pokazao da nije tako i da ovaj stroj ne narušava zakone fizike. U slučaju termodinamičke ravnoteže jednako aktivnom Brownovom gibanju izloženi su kotači u oba spremnika. Pod utjecajem sudara s molekulama plina zapinjač oscilira te često ima dovoljno energije da napusti razmak među zupcima kotača i tako omogući ravnopravno okretanje u oba smjera. Ako

[1] Autorica je asistentica na Odsjeku za matematiku Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, e-mail: sintijat@net.hr.

[2] Koautorica je izvanredni profesor fizike na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, e-mail: goranka@ffri.hr.

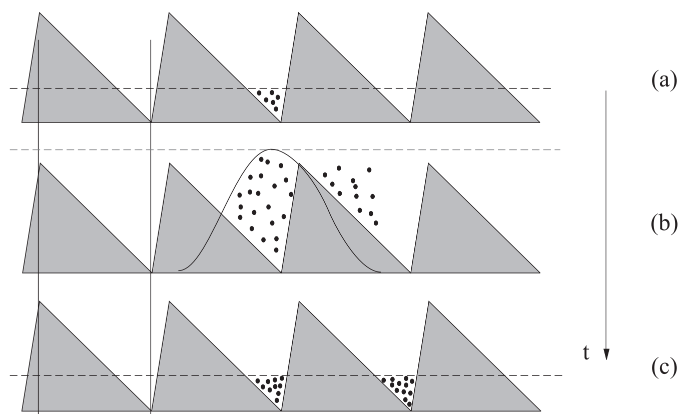
mehanizam djeluje u oba smjera, teret oscilira gore-dolje i ne obavlja se koristan rad. Detaljnom analizom rada ovog stroja Feynman je pokazao da uređaj može podizati teret samo kada se spremnik sa zupčanikom nalazi na temperaturi nižoj od temperature drugog spremnika. Također je izračunao korisnost takvog uređaja i dobio da je ona velika. Međutim, kasnije se pokazalo da je taj rezultat pogrešan i da Feynmanov uređaj nema veliku korisnost. Iako ovakav uređaj može vršiti koristan rad, zahtijeva veliku temperaturnu razliku spremnika, a osim toga stroj ima visoku toplinsku provodnost. Posljedica je nizak stupanj efikasnosti. I pored toga što je Feynmanov uređaj naišao na mnoge kritike [5], zupčanik sa zapinjačem kao zakočnim mehanizmom inspirirao je fizičare da primijene asimetrične periodične potencijale na Brownove čestice. Tako su nastale ideje za nove Brownove strojeve. Potencijali takvog oblika danas se nazivaju *ratchet*–potencijali. Ovakvi potencijali predstavljaju temelj Brownovih strojeva te se čak i za njihov princip rada često koristi naziv *ratchet* mehanizam.



Slika 1. Feynmanov uređaj.

Brownovi strojevi koriste nasumično gibanje Brownovih čestica na koje djeluju i vanjske sile. Na taj način upravljamo slučajnim gibanjem čestica. Asimetričnost potencijala selektivno zaustavlja (ili čini slabo vjerojatnim) gibanje čestica u smjeru koji ne želimo, ali dozvoljava gibanje u smjeru koji smo izabrali. Na taj način upravljamo slučajnim gibanjem čestica. Takav potencijal sam po sebi nije dovoljan budući da čestice difundiraju u ravnotežnim uvjetima u svim smjerovima ravnopravno ako je barijera mala, ili su zarobljene u potencijalnoj jami u slučaju visoke barijere. Potreban je dakle i dodatan izvor energije, tj. promjenjiva vanjska sila. Takvom silom se mijenja energija Brownovih čestica te ih se prisiljava da prate položaj potencijalnih minimuma prostornog potencijala ili da difundiraju, ovisno o odnosu njihove energije i energijskih barijera prostornog potencijala. Energijske promjene izvana postižu se na razne načine, npr. promjenjivim električnim poljem, neravnotežnim kemijskim reakcijama ili nasumičnim obasjavanjem svjetlošću. Slika 2 prikazuje primjer primjene temperaturnih modulacija, tzv. temperaturni *ratchet* mehanizam. Na sustav čestica primijeni se asimetričan periodički prostorni potencijal, a zatim se sustav izlaže vremenski ovisnim temperturnim oscilacijama s periodom τ, tako da je $T(t) = T(t + \tau)$, gdje je T temperatura, a t vrijeme. Temperatura je ili niska ili visoka, a te dvije njezine vrijednosti odabrane su

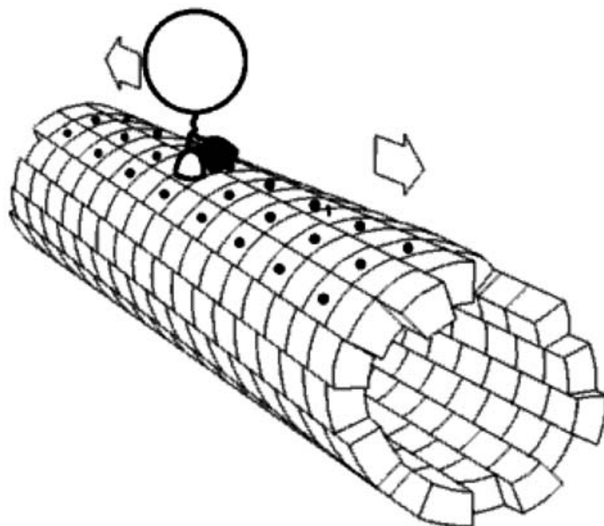
tako da je energija čestica ili puno niža, ili puno viša od amplitude vanjskog potencijala. Kad je temperatura niska čestice nemaju dovoljno energije za prelazak potencijalne barijere te se nalaze u potencijalnoj jami, u blizini lokalnog minimuma vanjskog potencijala. Kad je temperatura visoka, energija čestica raste i veća je od potencijalne barijere. Čestice difundiraju ravnopravno na sve strane, sve dok im energija sljedećim snižavanjem temperature ne postane preniska za slobodno gibanje, kada ponovno padaju u blizinu najbližeg minimuma vanjskog potencijala. Ako je vremenski interval između temperaturnih modulacija dovoljno dugačak, čestice će zbog asimetričnosti potencijala u prostoru zauzeti ili početno stanje ili najbliže stanje potencijalnog minimuma, kao što se vidi na slici 2. Na taj način čestice se, gledano u cjelini, gibaju usmjereno. Gibanje čestica je nasumično, ali odvija se u samo jednom zadanom smjeru. Simulacija rada Brownovog stroja nalazi se na internetu [7].



Slika 2. Primjena temperaturnog ratchet mehanizma u Brownovom stroju: (a) hladno, (b) toplo, (c) hladno [6].

Molekularni strojevi u stanicama živih organizama obavljaju vrlo značajne funkcije [8,9]. Oni su pod stalnim utjecajem molekula sredstva te prema tome izvode i Brownovo gibanje, no usprkos termičkim i drugim smetnjama gibaju se usmjereno i to s nevjerojatnom preciznošću. Mehanizam gibanja ovakvih molekularnih strojeva predmet je izučavanja područja biologije koje objašnjava temeljne životne funkcije. Prirodni molekularni strojevi su model za konstrukciju umjetnih nanostrojeva. Kao i svakom makroskopskom stroju i molekularnim strojevima za rad je potrebno gorivo. Energija potrebna za njihov rad mnogo je manja od one koju koriste konvencionalni strojevi. Načini snabdijevanja energijom različiti su, ovisno o vrsti molekularnog stroja i njegovoj funkciji. Molekule ATP (adenozin trifosfat) u kemijskim reakcijama stvaraju energiju. Mehanizam gibanja molekula kinezina primjer je gibanja molekularnih strojeva. Kinezini su mehanokemijski proteini koji pretvaraju kemijsku energiju u mehaničku. Kemijsku energiju oslobađaju molekule kao što je ATP. Kinezini se gibaju po mikrocjevčicama (slika 3). Mikrocjevčice se nalaze u stanicama organizama, imaju promjer 24 nm i duljinu od dijela μm do nekoliko stotina μm. Molekule mikrocjevčica zarobe kinezin kad on nema dovoljno energije. Međutim, hidrolizom ATP molekula se dobiva energija što omogućuje difuziju kinezina. Proces traje dok se ne potroše zalihe produkata ATP hidrolize kad kinezin opet postaje zarobljen. Na taj način kinezin se usmjereno giba po mikrocjevčicama. I na ovom primjeru možemo uvjetno primijeniti model ratchet potencijala ako hidrolizu molekula ATP-a analiziramo kao transformaciju

koja uzrokuje periodično smanjivanje energijskih barijera kojima mikrocjevčice zarobe kinezin. Animirano gibanje kinezina može se promatrati na internetu [10].



Slika 3. Molekularni stroj: gibanje kinezina po mikrocjevčici [10].

Primjena Brownovih strojeva značajna je za biologiju, medicinu, kemiju, fiziku i tehnologiju [8,9]. Istraživanje Brownovih i molekularnih strojeva je važan dio novog i multidisciplinarnog područja nanotehnologije.

Literatura

[1] B. LUKIĆ, *Brownovo gibanje*, Zbornik ljetne škole mladih fizičara (2005), `http://www.hfd.hr/ljskola/2005/lukic-zbornik.pdf`

[2] B. LUKIĆ, *Eksperimenti s optičkom pincetom*, Matematičko-fizički list, LV 3, (2004. – 2005.), 130.

[3] D. ŠESTOVIĆ, *Kolika je temperatura dionica na Zagrebačkoj burzi?*, E-škola fizike, `http://eskola.hfd.hr/mini_projekt/mp4/mp4.htm`

[4] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison Wesley Longman (1963).

[5] J. M. R. PARRONDO, P. ESPANOL, *Criticism of Feynman's analysis of the ratchet as an engine*, Am. J. Phys. 64 (9) (1996), 1125.

[6] P. HÄNGGI, F. MARCHESONI, F. NORI, *Brownian Motors*, Annalen der Physik 14 (2005), 51.

[7] Brownian Motor, `http://www.chaos.gwdg.de/applets/brownian_motor/bm.html`

[8] Molecular Motors Group in the Biology Department at the University of York, `http://motility.york.ac.uk/`

[9] D. CHOWDHURY, *Alice in a micro-factory*: modeling materials and mechanisms of natural nano–machines, `http://arxiv.org/abs/physics/0505107`

[10] *Mechanisms of Motor Protein Transport*: Kinesin walking, `http://python.rice.edu/~kolomeisky/transport.htm`

Spora svjetlost

Hrvoje Skenderović[1], *Zagreb*

Uvod

Brzina svjetlosti, c, zauzima posebno mjesto u fizikalnim zakonima. Iz Einsteinove je specijalne teorije relativnosti poznato da ništa ne može putovati brže od svjetlosti u vakuumu, $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$. Lorentzove transformacije pokazuju i da je brzina svjetlosti ista u svim sustavima motrenja, odnosno svjetlosni signal poslan iz najbržeg zrakoplova će se širiti istom brzinom i za pilota u kabini i za promatrača koji stoji na zemlji. Ako razmišljamo o svemirskim putovanjima voljeli bismo da su moguće i veće brzine od c, ali u mnogim primjenama u bliskoj budućnosti trebat će nam svjetlost sporija od tih 300 tisuća $\mathrm{km/s}$, pa i potpuno zaustavljena svjetlost. Ove primjene obuhvaćaju optičke preusmjerivaše (routere), optičko skladištenje podataka, kvantna računala, radar [1].

Zapravo, svjetlost se u svakom sredstvu, bio to zrak, staklo, voda ili nešto četvrto, giba brzinom koja je manja od c. Točnije, brzinom c/n gdje je n indeks loma tog sredstva. Indeks loma stakla je oko 1.5 što znači da se svjetlost kroz staklo giba brzinom od oko 200 tisuća $\mathrm{km/s}$. Postoje optički materijali indeksa loma do $n = 5$, ali ni to ne daje dovoljno sporu svjetlost. Povrh toga, materijali s velikim indeksom loma imaju i veliku refleksivnost.

Brzina svjetlosti

Da bismo shvatili kako se svjetlost može usporiti do zemaljskih brzina pogledajmo prvo što su to fazna i grupna brzina putujućeg vala. Svjetlost je elektromagnetski val i predstavlja titranje elektromagnetskog polja koje se širi u prostoru. Frekvencija tog titranja, f, povezana je s brzinom širenja vala, v, i valnom duljinom, λ, pomoću jednostavne relacije:

$$v = \lambda \cdot f. \tag{1}$$

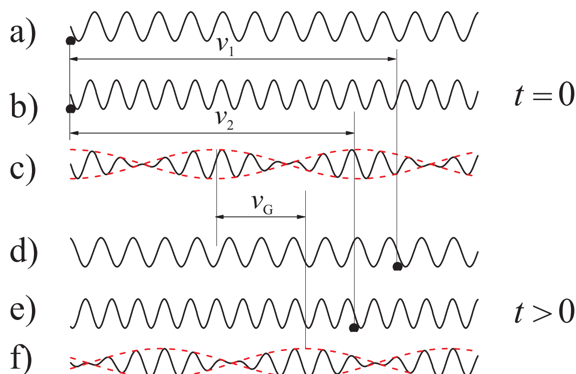
Širenje monokromatskog vala (koji titra samo jednom frekvencijom) duž osi x opisuje se sinusoidalnom funkcijom:

$$\sin(\omega t - 2\pi x/\lambda). \tag{2}$$

Ovdje je upotrijebljena kružna frekvencija $\omega = 2\pi f$, a t predstavlja vrijeme. Ukoliko argument sinusne funkcije (fazu vala) izjednačimo s nulom, dobijmo faznu brzinu v, kao što je definirano relacijom (1). Brzina v se naziva faznom brzinom jer je to brzina kojom se faza vala širi prostorom. Međutim, u mnogo realnijem slučaju, jedan val se sastoji od više frekvencija. Takav val je dan zbrajanjem sinusoidalnih funkcija

[1] Autor je znanstveni suradnik Instituta za fiziku, radi na projektu *Femtosekundna laserska spektroskopija i ultra hladne molekule*, e-mail: skenderovic@ifs.hr

sličnih izrazu (2). Zbroj monokromatskih valova koji imaju bliske frekvencije dovodi do stvaranja niza grupa, kao što je prikazano na slici 1 za zbroj dva vala. Gibanje envelope tih grupa, određeno je grupnom brzinom, v_g. Energija vala se (najčešće) prenosi upravo grupnom brzinom, što znači da ona ima veći fizikalni značaj. Grupna brzina je jednaka faznoj brzini kada su ove za svaki monokromatski val različitih frekvencija međusobno jednake. Međutim, u slučaju da su fazne brzine različite za različite frekvencije, fazna brzina i grupna brzina se razlikuju. Ova razlika može biti veoma znatna i ilustrirana je također na slici 1. Pojava da se valovi različitih frekvencija šire različitim brzinama naziva se disperzijom i sasvim je uobičajena pojava pri prolasku svjetlosti kroz sredstvo.



Slika 1. Ilustracija grupne brzine. Na slici 1a) i 1b) su dva ravna vala različitih frekvencija u trenutku $t = 0$. Na slici 1c) je njihova superpozicija. Jasno se uočava grupiranje vala na pojedinim mjestima. Slike 1d) i 1e) predstavljaju ista dva ravna vala u nekom kasnijem trenutku $t > 0$. Pomak faze možemo uočiti ako pratimo koliko se pomaknula točkica. Uočimo da dva ravna vala imaju različite fazne brzine. Pomak faze je razmjeran faznoj brzini v. Na slici 1f) je prikazana superpozicija valova u trenutku $t > 0$. Grupa se pomaknula mnogo manje nego faza pojedinih valova. Grupna brzina, v_G, je razmjerna pomaku maksimuma envelope. Animacija se može vidjeti na web adresi: http://projekt2.ifs.hr/skenderovic/mfl_example.html.

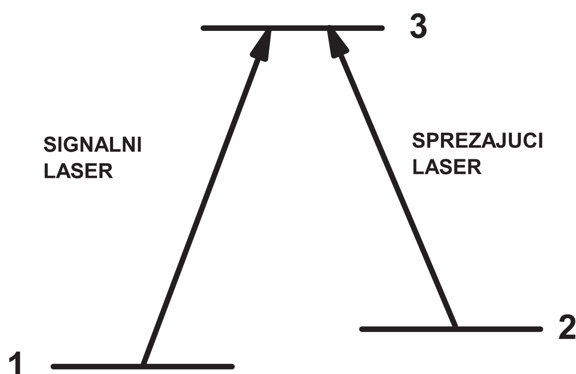
Apsorpcija i disperzija

Kada je disperzija velika, grupna brzina je znatno manja od fazne. Disperzija je osobito velika u blizini rezonantnih linija u spektru. One u spektru nastaju kada kvant svjetlosti, foton, ima energiju koja je upravo jednaka razlici između dva kvantna stanja u atomu. Zbog dualne prirode elektromagnetskog zračenja na svjetlost, koju smo do sada predstavljali kao val, možemo gledati i kao na roj čestica, fotona. Istina, to su pomalo specifične čestice, a postoje samo dok se gibaju brzinom svjetlosti. Bitno je da je energija fotona jednoznačno određena frekvencijom pripadajućeg elektromagnetskog polja. Energija fotona je jednostavno umnožak čuvene Planckove konstante i frekvencije, $E = hf$. Pošaljimo onda u rezonantni medij svjetlost koju želimo usporiti. Što će se dogoditi? Dakle, atom s dva kvantna stanja čija razlika odgovara energiji fotona može s određenom vjerojatnošću apsorbirati foton iz našeg snopa i prijeći iz donjeg kvantnog stanja u gornje. Nakon nekog vremena, atom će se vratiti u donje stanje i pritom izračiti

foton ali u nasumičnom pravcu i bez informacije o kvantnom stanju upadnog fotona. Naša upadna svjetlost koju želimo usporiti je u biti nestala. Na rezonanciji imamo potrebnu disperziju ali nam smeta apsorpcija.

Elektromagnetski inducirana transparencija

Da bi spriječili apsorpciju, istraživači se u ovom području služe kvantnomehaničkim fenomenom pod imenom elektromagnetski inducirana transparencija (EIT). EIT je prvi put postignuta 1990. na Stanfordskom sveučilištu u grupi Stephena E. Harrisa [2]. Bit ovog fenomena je da se inače neprozirno sredstvo obasja laserskim svjetlom pažljivo odabrane frekvencije kako bi se učinilo providnim (transparentnim) za svjetlo drugog lasera.



Slika 2. Energetski dijagram tri kvanta stanja sa signalnim i sprezajućim laserom.

Neka atom posjeduje tri kvantna stanja, 1, 2 i 3. Stanje 1 je najniže energije, stanje 2 ima tek nešto veću energiju, a stanje 3 je visoko iznad, kao na slici 2. Imamo dva laserska snopa, sprezajući laser čiji su fotoni ugođeni na energetsku razliku 3–2 i signalni laser ugođen na razliku 3–1. Na početku su svi atomi u stanju najniže energije, stanju 1. Uključi se sprezajući laser i njegova svjetlost prolazi kroz sredstvo jer u 2 ne postoji populacija. Potom se uključi signalni laser i kako njegova svjetlost dolazi do atoma, zajedničkim djelovanjem dva lasera atomi se prebacuju u stanje kvantne superpozicije 1 i 2. Kvantna superpozicija znači da se atom istodobno nalazi i u stanju 1 i u stanju 2. Stanje 1 bi apsorbiralo signalni snop, stanje 2 sprezajući snop, ali skupa se ta dva procesa međusobno poništavaju – efekt koji se naziva kvantna interferencija. Stanje superpozicije se naziva "tamnim stanjem" (dark state) jer atomi ne mogu vidjeti svjetlost niti jednog od dva lasera, oni "ostaju u tami". Atomi postaju transparentni za svjetlost signalnog lasera, jer tamno stanje ne može apsorbirati. Budući da sredstvo i dalje posjeduje visoku disperzivnost, odnosno indeks loma se naglo mijenja u ovisnosti o optičkoj frekvenciji, grupna brzina može biti vrlo mala. Sve ovo vrijedi samo za mali interval frekvencija blizu rezonancije.

Unatrag par godina, nekoliko grupa znanstvenika uspjelo je usporiti svjetlost na brzine ispod 100 m/s. U rubidijevim parama na sobnoj temperaturi signal je usporen na 90 m/s (Kash [3]). Grupa L. V. Hau [4] s Rowland instituta iz Cambridgea u američkoj državi Massachussetts se bavi hlađenjem atoma što predstavlja jedno zanimljivo stanje materije. U jednom takvom oblačku natrijevih atoma ohlađenih na nevjerojatno niske temperature, manje od 1 mikro Kelvina iznad apsolutne nule, svjetlost je usporena na 17 m/s. To je oko 60 km/h, znači, jedan biciklist bi mogao biti brži od svjetlosti. Napomenimo da se u ovim eksperimentima ne događa samo usporavanje svjetlosti već i njeno prostorno sažimanje. Na početku je svjetlosni puls dug oko kilometar. Naravno, laboratorij je puno manjih dimenzija ali kada bi bilo dovojno prostora laserska svjetlost bi zauzimala upravo toliku duljinu. Svjetlost dolazi u oblačak s brzinom oko 300 000 km/s, a unutar oblačka brzina pada na 60 km/h. Frontalni dio pulsa, već u sredstvu, putuje ekstremno sporo, a rep pulsa još juri brzinom svjetlosti kroz zrak te dolazi do gomilanja svjetlosti u sredstvu, odnosno do sažimanja. Na kraju je cijeli puls stao u oblačak i duljina pulsa se smanjila s jednog kilometra na 50 mikrona!

Brzina spore svjetlosti ovisi o nekoliko parametara. Neki su fiksni i ne mogu se mijenjati jer ovise o atomu i energijama koji su izabrani za medij. Dva parametra najpogodnija za kontrolu su gustoća atoma i intenzitet sprezajućeg lasera. Brzina pulsa se može reducirati smanjenjem intenziteta sprezajućeg lasera. Krajnje usporavanje se postiže kada se sprezajući laser potpuno isključi u trenutku kada se svjetlosni puls nalazi u sredini oblačka. To dovodi do još jednog zanimljivog i obećavajućeg fenomena sa stanovišta primjene – skladištenja svjetlosti.

Kao odgovor na postupno slabljenje sprezajućeg polja, svjetlosni signal se još više usporava i konačno dolazi do zaustavljanja svjetlosti signalnog lasera, zapravo njenog nestanka. Međutim, informacija koju je nosio signal nije izgubljena, ona je pohranjena u kvantna stanja atoma. Informacija je zamrznuta kao da efektivno imamo hologram pulsa zapisan u atomima i može se ponovno regenerirati pažljivim uključivanjem sprezajućeg lasera. Kao nekom magijom, signal se ponovno pojavljuje i nastavlja svoj put sporom brzinom. Vrijeme skladištenja "svjetlosti" je ograničeno jer hologram s vremenom blijedi, odnosno atomi gube koherenciju. Grupa profesora Lukina [5] s Harvarda je postigla vrijeme uskladištenja svjetlosti od oko pola milisekunde u rubidijevim parama na 70 – 90 °C. To se može činiti kratkim vremenom, ali ne zaboravimo da za to vrijeme "obična" svjetlost prijeđe 150 kilometara.

Nakon ovih inicijalnih demonstracija spore svjetlosti, mnoge grupe su se okrenule postizanju usporavanja i skladištenju svjetlosti u manje egzotičnim sredstvima od ultrahladnih atoma ili atomskih para. Za praktičnu primjenu ovog fenomena moraju se koristiti optička vlakna ili neki slični materijal, dostupan i robustan.

Upravo tragom tih zahtjeva je grupa s Ecole Polytechnique iz Lozane [6] sredinom 2005. demonstrirala metodu za feksibilnu vanjsku kontrolu grupne brzine signala koji se prostire optičkim vlaknom. Metoda se temelji na stimuliranom Brillouinovom raspršenju (SBS), odnosno međudjelovanju dva nasuprot propagirajuća snopa, snažnog pumpnog vala i slabog signalnog vala. Putem SBS-a formira se akustički val frekvencije f_A koja je jednaka razlici frekvencija pumpnog, f_P, i signalnog lasera, f_S. S praktične strane gledišta, SBS se može shvatiti kao uskopojasno pojačalo u kojemu kontinuirani pumpni

val generira pojačanje u uskom intervalu frekvencija (30-50 MHz) oko frekvencije $f_P - f_A$. U tom intervalu ponovno imamo usporavanje grupne brzine i to po jednostavnom pravilu da za 1 decibel pojačanja dobivamo usporavanje od 1 nanosekunde. Postignute maksimalne veličine indeksa loma za sada iznose oko $n = 4.26$, što je malo u odnosu na ranije opisane metode ali ima veliku prednost u jednostavnosti eksperimentalnog postava. Daljnjim razvojem očekuju se još niže grupne brzine signala.

Primjena spore svjetlosti

Kao što smo rekli, postoji veliki komercijalni interes za sporom svjetlošću i "uskladištenjem" svjetlosti u telekomunikacijama, i u budućnosti u kvantnim računalima. Podaci koji putuju internetom velikim dijelom se prenose optičkim putem, ali na svakom čvorištu se moraju pretvoriti u električni signal i poslije ponovno u optički. To predstavlja usko grlo mreže i kada bi se ti preusmjerivači mogli izvesti kao isključivo optički uređaji brzina interneta bi se znatno povećala. Takav uređaj zahtijeva optičku memoriju. To se trenutno rješava pomoću snopova optičkih vlakana koji imaju fiksnu duljinu i uvode fiksno kašnjenje. Vrijeme pristupa ovim memorijama je približno jednako vremenima pristupa čvrstom disku, dakle ne baš najbrže. Pomoću spore svjetlosti kašnjenje optičkog signala bi se jednostavno kontroliralo mijenjanjem grupne brzine.

Što se tiče kvantnih računala, do njih je još daleko, a ovdje nemamo ni prostora da objasnimo sam koncept. Ipak, jedan primjer će možda ilustrirati značaj ove tehnologije. Klasičan problem u informatici, faktorizirati neki broj na prim-brojeve – za broj od 300 znamenki klasičan algoritam daje rješenje u $5 \cdot 10^{24}$ koraka što na terahercnoj brzini traje 150 000 godina. Kvantni algoritam nudi rješenje u $5 \cdot 10^{10}$ koraka što na istoj brzini traje manje od sekunde! Za to se isplati potruditi.

Literatura

[1] M. O. Scully and G. R. Welch, *Slow, Stopped and Stored Light*, Physics World, 17, 31 (2004).

[2] K. J. Boller, A. Imamoglu, S. E. Harris, *Observation of Electromagnetically Induced Transparency*, Phys. Rev. Lett. 66, 2593 (1991).

[3] M. M. Kash, V. A. Sautenkov. A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry, M. O. Scully, *Ultraslow group velocity and enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic*, gas, Phys. Rev. Lett. 82, 5229 (1999).

[4] L. V. Hau, *Frozen Light*, Scientific American-The Edge of Physics, 44 (2003).

[5] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth and M. D. Lukin, *Storage of Light in Atomic Vapor*, Phys. Rev. Lett. 86, 783 (2001).

[6] M. González-Herráez, K-Y Song and Luc Thévenaz, *Optically controlled slow and fast light in optical fibers using stimulated Brillouin scattering*, Appl. Phys. Lett. 87, 081113 (2005).

Nobelova nagrada za fiziku 2005. godine

Goran Pichler[1], *Zagreb*

Švedska kraljevska akademija znanosti odlučila je podijeliti Nobelovu nagradu za fiziku u 2005. godini [1–4] u potpunom skladu sa Svjetskom godinom fizike (www.wyp2005.hr). Dodijeljena je trojici istaknutih fizičara. Roy Glauber, profesor na Harvardskom sveučilištu, dobio je polovicu nagrade za doprinos kvantnoj teoriji i optičkoj koherenciji, to jest objašnjenju koherencije elektromagnetskih polja, gdje je uveo pojam korelacije između fotona, kvanata svjetlosti. Drugu polovicu su podijelili Jan Hall iz JILA-e u Boulderu i Theo Hänsch iz Max Planck instititute za kvantnu optiku u Garchingu, za doprinos u razvoju najpreciznijih mjerenja fundamentalnih fizikalnih konstanti, a posebno za uvođenje tehnike koja se osniva na takozvanom frekventnom češlju, pojmu usko vezanom uz ultrakratke laserske pulsove.

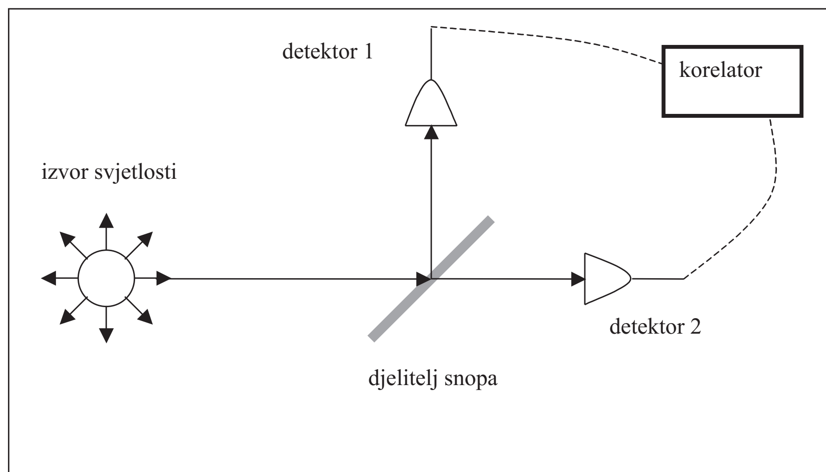
Poticaj za Svjetsku godinu fizike bio je vezan uz čudesnu godinu 1905. kada je mladi Albert Einstein objavio nekoliko članaka s dalekosežnim utjecajem. Jedan od tih radova objavljen u Annalen der Physik pod naslovom: "O heurističkom pogledu na stvaranje i uništavanje kvanata svjetlosti", ima duboku vezu sa svim što je do današnjih dana ostvareno na polju kvantne optike. Roy Glauber je 1963. godine objavio tri fundamentalna znanstvena rada u kojima je kvantizirao elektromagnetsko polje zračenja i primijenio ga na običnu svjetlost. Ponukan je bio eksperimentom kojeg su izveli R. Hanbury Brown i R. Q. Twiss (HBT) pomoću Michelsonovog interferometra, u kojem nisu mjerili uobičajenu interferenciju, već korelaciju signala dobivenih iz dva različita detektora (vidi sliku 1). Njihova glavna namjera je bila da odrede veličinu udaljenih zvijezda, ali dobili su iznenađujući rezultat. Kada su krakovi nakon djelitelja snopa bili jednake duljine, ukupni intenzitet je porastao za dva puta. Premda je 1956. E. M. Purcell dao objašnjenje pomoću klasične teorije, tek je Glauber konzistentnom primjenom kvantne elektrodinamike objasnio opažanja. Pri tome je uveo pojam koherentnih stanja elektromagnetskog polja, pomoću kojih je mogao dobro opisati termalno zračenje izvora svjetlosti, ali je mogao objasniti i ponašanje laserskog zračenja i nekih drugih neklasičnih izvora svjetlosti. Svi kasniji radovi iz kvantne optike bazirali su se na ovom osnovnom doprinosu, pa je općenito korelacija fotona postala jedan od posebnih područja zanimanja kvantne optike, a korelacije viših redova su našle zanimljive primjene, posebno kod izuzetno slabih svjetlosnih intenziteta gdje fotonska priroda svjetlosti dolazi do punog izražaja i gdje takozvana kvantna buka (quantum noise) priječi dosezanje vrhunske preciznosti mjerenja. HBT eksperiment je pokazao da termalni izvori svjetlosti pretežno emitiraju parove fotona. Nasuprot tome laseri imaju posve drugačiju prirodu emisije. Postoje i takvi izvori svjetlosti, koji ne samo da ne zrače parove fotona, nego, posve suprotno termalnim izvorima, ponekad ne zrače ništa (anti bounching). Razlika naravno dolazi od činjenice što termalni izvori svjetlosti zrače fotone uslijed spontane emisije, dok kod lasera i ostalih neklasičnih izvora svjetlosti stimulirana emisija igra najvažniju ulogu. Time se objašnjava osnovna razlika između vrućih izvora svjetlosti iz raznih žarulja s mnoštvom frekvencija i faza s jedne strane i svjetlosti lasera i sličnih koherentnih izvora svjetlosti sa specifičnom frekvencijom i posve određenom fazom s druge strane. Danas je moguće ostvariti izvore neklasičnog svjetla u kojima se djelomice može smanjiti

---

[1] Autor je znanstveni savjetnik i voditelj znanstvenog projekta *Femtosekundna laserska spektroskopija i ultra hladne molekule* na Institutu za fiziku, e-mail: pichler@ifs.hr.

kvantna buka čime se povećava preciznost mjerenja. Takvo se svjetlo opisuje takozvanim zgnječenim stanjima (squeezed states). Kod nižih razina intenziteta svjetlosti granularna fotonska struktura dolazi do punog izražaja. To se može iskoristiti u modernim kvantnim komunikacijama u kojima je sigurnost prijenosa podataka gotovo bez rizika, a sve to je od velikog značaja za razvoj kvantnog računanja.

Dvostruka priroda svjetlosti – valna i čestična – čine osnovu KVANTNE OPTIKE, što je zapravo primjena kvantne teorije na cijelo polje fizikalne optike. Rezimirajmo kako su mnogi istraživači bili uvjereni da fotoni interferiraju sami sa sobom. Eksperimenti s mjerenjem korelacije su to posve izmijenili i doveli točnost mjerenja do ruba kvantnog šuma.

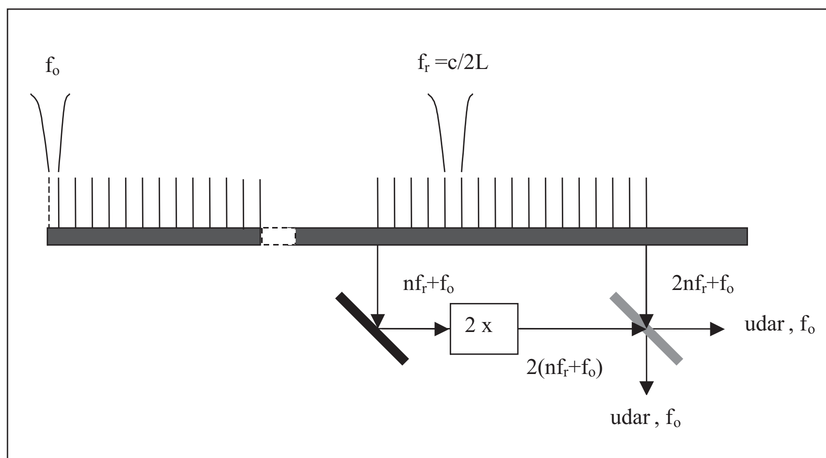


Slika 1. HBT mjerenje korelacije intenziteta nakon dijeljenja snopa u dva detektora.

Frekventni češalj je najnovija tehnika i tehnologija, koja je trenutno u brzom razvoju i od koje se očekuje još nebrojeno primjena, koje će zasigurno ući, ne samo u pore moderne fizike, nego će značiti novi vjetar u primjenama, od medicine pa sve do ultrapreciznih mjerenja frekvencija i napose vremena. Važan je doprinos Johna Halla i Theodora Hänscha što su omogućili mjerenje frekvencija svjetlosti s apsolutnom točnošću od petnaest znamenaka. Oni su razvili nekoliko ultrastabilnih i neobično monokromatskih kontinuiranih lasera i primijenili tehniku frekventnog češlja s ultrabrzim laserima kako bi postigli najtočnija mjerenja frekvencije. Time je omogućeno mjerenje različitih fizikalnih konstanti i provjera njihove stabilnosti tijekom vremena. Moguće je sada razviti ultratočne atomske satove, čime se još više poboljšava sustav za opće pozicioniranje (GPS tehnologija).

Od kada je napravljen laser i razvijena teorija njegova rada poznato je da u rezonatoru mogu obitavati transverzalni i longitudinalni modovi. Longitudinalni modovi zadovoljavaju uvjet $n\lambda = 2L$, gdje cijeli broj valnih duljina razapinje dvostruku veličinu rezonatora. Naravno unutar rezonatora duljine L može istovremeno obitavati nekoliko longitudinalnih modova, pa čak u novije vrijeme i njih sto tisuća ili čak milijun. Razmak između susjednih modova titranja je $c/2L$ i ta razlika je postojana za sve prisutne modove u laserskom rezonatoru. Kada svi ti longitudinalni modovi titraju nasumično iz takvog lasera se dobije kontinuirana svjetlost. Ukoliko su svi modovi u međusobnoj konstantnoj fazi, njihovim zbrajanjem dobiva se ultrakratki puls. Ti pulsovi mogu trajati 10 do 100 femtosekundi (1 femtosekunda

= 0.000000000000001 s). Primjer zbrajanja modova prikazan je na slici 3. Na Web stranici `http://projekt2.ifs.hr/skenderovic/mfl_example.html`, nalazi se ilustracija propagacije udara dva elementarna vala u disperzivnom sredstvu. Udari mogu biti još i kraći, ali se tada frekventno područje mora proširiti prema kratkovalnom spektralnom području, što je jedno od najaktivnijih poduhvata današnje atomske i optičke fizike.



Slika 2. Prikaz mjerenja frekvencije jednog vala svjetlosti.

Velika je zasluga Johna Halla i Theodora Hänscha što su frekventni češalj umješno iskoristili za najtočnije mjerenje frekvencija, što je u znatnoj mjeri olakšalo i pojeftinilo mjerenje fundamentalnih fizikalnih konstanti. Na slici 2 je prikazan frekventni češalj koji se dobiva iz femtosekundnog laserskog oscilatora. Svjetlost iz takvog uređaja propušta se kroz strukturirano optičko vlakno (fotonski kristal) čime se uslijed nelinearnih procesa frekventni češalj proširuje i obuhvaća najmanje jednu oktavu frekvencija. Bilo koja frekvencija u tom intervalu može se izraziti sljedećom relacijom:

$$f = nf_r + f_o,$$

gdje je n cijeli broj, a f_o ide od nule do f_r. Dvostruko veća frekvencija (na drugom kraju oktave) dana je izrazom:

$$F = 2f = 2nf_r + f_o.$$

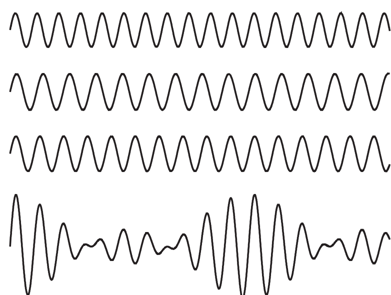
Ako se sada frekvencija f udvostruči pomoću posebnog nelinearnog kristala (kakav se koristi u zelenim laserskim pokazivačima) dobiva se:

$$2f = 2nf_r + 2f_o.$$

Kada se F i $2f$ pomiješaju u određenom elektroničkom uređaju, mogu se na izlazu dobiti razlike frekvencija F i $2f$:

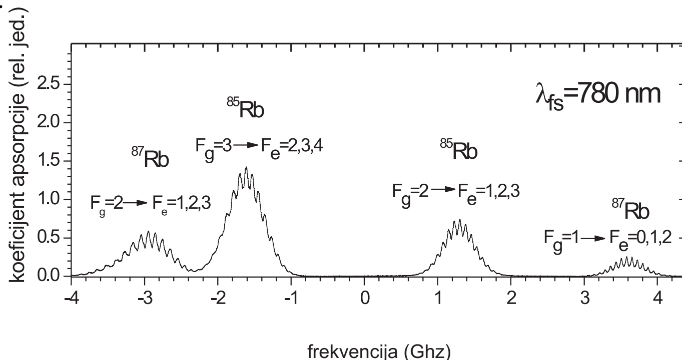
$$2f - F = 2nf_r + 2f_o - 2nf_r - f_o = f_o$$

i time se vrlo precizno određuje mala veličina f_o. Bilo koja frekvencija se tada može s vrlo visokom točnošću odrediti, korištenjem sličnog uređaja za miješanje raznih frekvencija. Kada se sve poveže s najtočnijim frekvencijama cezijevog atomskog sata, postiže se jednostavna povezanost mikrovalnog i vidljivog spektralnog područja s istom točnošću, koja time dostiže fantastičnih 15 znamenaka. Današnja je potreba da ta točnost bude i za još dodatna tri reda veličine veća.



Slika 3. Prikaz zbrajanja titranja tri longitudinalna moda u femtosekundnom laseru.

Posljednjih nekoliko godina primjena tehnike frekventnog češlja širi se velikom brzinom ponajviše zahvaljujući relativno dostupnijim femtosekundnim laserskim oscilatorima na osnovi kristala titanom dopiranih safira ili erbiumom dopiranih optičkih vlakana. Osnovna konfiguracija je sve jeftinija i konkurencija proizvođača raste, tako da dostupnost i manjim laboratorijima omogućuje razbuktavanje mašte istraživača širom svijeta. Na slici 4 prikazan je utjecaj frekventnog češlja na profile apsorpcijskih linija hiperfine strukture izotopa rubidija. Kako je repeticija ultrabrzih pulsova od 80 MHz jednaka razmaku susjednih longitudinalnih modova, struktura ovih spektralnih linija dobiva "bodljasti" izgled. U suštini se mijenjaju brzine atoma rubidija i grupiraju se na određenim mjestima. Mi se nadamo da bi ovakvo grupiranje moglo imati, u krajnjoj liniji, utjecaj na razvoj novih metoda hlađenja atoma i molekula do ultraniskih temperatura.



Slika 4. Prikaz utjecaja frekventnog češlja na profil hiperfinih spektralnih linija dva izotopa rubidija. Razmak između susjednih "bodlji" odgovara razmaku susjednih longitudinalnih modova u Ti:Safirnom laserskom oscilatoru (80 MHz), što je ujedno i repeticija femtosekundnih pulsova.

Roy Glauber rođen je 1925. g. i još uvijek je vrlo aktivan profesor na Harvardskom sveučilištu, gdje je znatno ranije završio studij fizike i doktorat pod vodstvom nobelovca Juliana Schwingera. Dvije godine proveo je u Institutu za napredne studije u Princetonu, pola godine je radio s Wolfgangom Paulijem u Zürichu, a proveo je i godinu dana u Caltechu u Kaliforniji. Roy Glauber kao izvrstan profesor opće fizike u svakom svom predavanju održava tonus znatiželje na najvišem nivou. Posebno su zanimljivi njegovi pokusi iz optike, kada se dvorana mora zamračiti, ali to je ujedno i prirodni refleks da

se studenti ili još više zainteresiraju ili da se još više uspavaju. Tako je jednom za svog posjeta Max Planck Institutu za kvantnu optiku u Garchingu prikazao film o optičkim vlaknima. Svojstvo vođenja svjetlosti kroz vlakna prikazao je tako da je stakleni cilindar napunjen vodom pri dnu odčepio i tako napravio mlaz vode. Sa suprotne strane otvora svjetlost je obasjavala mlaz pri izlazu iz posude. Zbog totalne refleksije unutar tankog mlaza, svjetlost je ostala u tom prozirnom snopu vode i sakupljala se u vjedru za vodu. Kada je istekla sva voda iz staklenog cilindra prof. Glauber je zavirio u vjedro vode koje je svjetlucalo i rekao: "Pa naravno kako smo zahvatili vodu tako smo i svjetlost pohranili u toj istoj vodi". Nastao je tajac, jer svi znaju da se svjetlost ne može samo tako pohraniti, jer je neuhvatljiva! Tajna se kasnije razotkrila priznanjem da je u vjedru za hvatanje vode već na početku eksperimenta na dnu bila postavljena upaljena džepna svjetiljka.

Jan Hall je rođen 1934. g., a doktorirao na Carnegie institutu tehnologije u Pittsburghu, Pennsylvania. U početku je radio na stabilizaciji mikrovalnih izvora zračenja, a onda se preselio u Colorado, gdje je u Boulderu nastavio karijeru u NIST-u (Nacionalni institut za standarde i tehnologiju) na razvoju ultrastabilnih lasera i preciznih mjerenja. Nešto kasnije nastavio je rad na JILA-i (Joint Institute for Laboratory Astrophysics), a postao je i naslovni profesor na ondašnjem Sveučilištu. Otišao je u mirovinu 2004. godine, no to nije prava mirovina, jer je iza sebe ostavio prepune laboratorije svojih instrumentalnih i tehničkih inovacija uz lijepi broj svjetski poznatih fizičara, koji danas nastavljaju njegovim putem.

Theodor Hänsch je rođen 1941. g. Doktorirao je 1969. g. na Sveučilištu u Heidelbergu, a voditelj mu je bio Peter Toschek. Nakon dvije godine poslijedoktorske specijalizacije u Stanfordu, California, prof. Arthur Schawlow mu je predložio da tamo i ostane. Tako je nakon par godina tamo postao profesor s ovećom grupom doktoranada, od kojih je kasnije Carl Wieman također postao Nobelovac (2000. g.) za Bose-Einstenovu kondenzaciju izvedenu 1995. g. Theodor Hänsch je poznat širom svijeta po svojem ustrajnom naporu da što točnije izmjeri spektar vodika, najjednostavnijeg atoma u prirodi. Posebno se istakao razvojem novih lasera i laserskih tehnologija, kojima je vremenom povećavao točnost svojih mjerenja do nevjerojatnih petnaestak znamenaka. U svojim plenarnim predavanjima na velikim konferencijama znao je plijeniti pažnju s briljantnim prikazima svojih eksperimentalnih inovacija. Uvijek je znao zaokupiti pažnju slušača i gledalaca time što je tvrdio da se samo povećanjem točnosti mjerenja mogu otkrivati horizonti nove fizike. To svakako znači na rubu poznatog i u kontaktu s nepoznatim ozbiljno prokrčiti putove novih spoznaja. U kojoj mjeri će velebni doprinosi ove trojice Nobelovaca utjecati na današnje mlade naraštaje teško je ovog trenutka predvidjeti, ali mi smo ionako ograničeni samo svojom vlastitom maštovitošću, a donekle i materijalnom podlogom. Kada bi se postavilo pitanje što nakon svih onih zanimljivih i veselih manifestacija Svjetske godine fizike gdje su sudjelovali svi naraštaji onda je jedini pravi odgovor kako se sve naprosto treba nastaviti i u 2006. godini i tako dalje u nadolazećima. Nedavne prognoze već nagovješćuju kako će 2006. biti godina primjene "spore svjetlosti" i "kvantnih komunikacija" u području kvantnog računanja.

Literatura

[1] http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/index.html
[2] http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/press.html
[3] http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/phyadv05.pdf
[4] http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/info.pdf

Karl Friedrich Gauss, najveći matematički genij svih vremena

Danilo Blanuša

"Neka ne uđe pod moj krov nitko nevičan geometriji."
Platon

Promatra li se povijesni period koji obuhvaća otprilike posljednja dva desetljeća osamnaestog i prvu polovinu devetnaestog stoljeća, u oči upadaju, prije svega, veliki politički događaji. Francuska revolucija, Napoleonov uspon i slom, te još neujedinjena, u puno malih država rastrgana Njemačka, daju tom vremenskom razdoblju karakteristično obilježje. Pa ipak su se tada zbivale i druge stvari, koje se, mjerimo li ih njihovom trajnom vrijednošću, ne mogu nimalo podcijeniti u odnosu na krvave ratove u kojima je tadašnja Europa težila stvoriti svoj budući životni oblik. Tko bi uopće mislio da je i u tim živahnim vremenima jedna mirna znanstvena pojava u neumornom radu našla vlastito ispunjenje: ***Karl Friedrich Gauss***, najveći matematički genij svih vremena, stvarao je svoja neprolazna djela. Gotovo da ne postoji drugi primjer takve nadmoćnosti nekog znanstvenika koji bi bio neograničeno i općenito priznat kao što je to slučaj kod Gaussa. Kad je jednom kralj Hannovera dao njemu u spomen iskovati medalju s natpisom "Georgius V. rex Hannoverae mathematicorum principi", podario mu je time počasnu titulu koju mu od tada nitko nije osporio. Kao "Principsa Mathematicorum" njega znaju i štuju ne samo njemački matematičari, već i matematičari diljem svijeta.



Karl Friedrich Gauss (1777. – 1855.)

Pred 165 godina, 30. travnja 1777., ugledao je Karl Friedrich Gauss u Braunschweigu svjetlo svijeta. Njegov otac Gerhard Diederich Gauss bio je zidar i posjedovao je skromnu majstorsku "radionicu vodoskoka i fontana". Majka mu je bila rođena prosjakinja. Sa sedam godina dospio je u katarinsku pučku školu (pučka škola nazvana po sv. Katarini, op. prev.). Tu je, prema školskom pravilniku, nakon dvogodišnjeg pohađanja škole dospio u takozvani računski razred, gdje su se odmah iskazale njegove neuobičajene matematičke sposobnosti. Dobro je poznata priča o tome kako je učitelj jednog dana

dao učenicima zadatak da prosumiraju sve brojeve od 1 do 40. Za nekoliko trenutaka Gauss je zadatak riješio u glavi. On se sjetio da se traženi zbroj može razdijeliti na djelomične zbrojeve $1+40$, $2+39$, $3+38$, i.t.d., pri čemu svaki daje 41. Budući se može načiniti 20 takvih djelomičnih zbrojeva, dobiva se rezultat $20 \times 41 = 820$. Svaka školovana osoba danas poznaje ovu metodu. Ona je sadržana u poznatoj formuli za zbroj aritmetičkog reda. Činjenica da je devetogodišnji dječak u trenu došao na takvu zamisao bila je prvo očitovanje njegove iznimne matematičke inteligencije. Taj neobičan talent uskoro je bio zapažen, te je vojvoda Karl Wilhelm Ferdinand od Braunschweiga mladome Gaussu omogućio pohađanje viših škola. Tako je Gauss 1788. g. dospio u Catharineum, te uspješno ga završivši 1793. godine i u Carolinum, pravu pripremnu školu za sveučilište. Uslijedio je studij u Göttingenu 1795. – 98., nakon kojeg se povukao u Braunschweig i tamo ostao, nemajući stalno zaposlenje, privatno podučavavši do 1807. godine. Te je godine pozvan u Göttingen na mjesto profesora astronomije i direktora zvjezdarnice, a to mjesto zadržao je do svoje smrti.

Činjenica da trenutak pojavljivanja tako moćnog matematičkog talenta, kao što je bio Gauss, pada u posljednja desetljeća 18. stoljeća, a mora se opisati kao sretni splet sudbine. Nakon Newtonovog i Leibnizovog otkrića infinitezimalnog računa u 17. stoljeću, započeo je uzburkani razvitak matematike, koji je vezan uz Eulera, Lamberta, Bernoullija, Maclaurina, d'Alemberta, Lagrangea i Laplacea, da spomenemo samo neka od najvećih imena. U vrijeme kad je Gauss počeo svoje znanstveno djelovanje, plima otkrića bila se ponešto smirila. Nastupio je trenutak potrebitosti za snažnim umom koji bi kritički razjasnio različita pitanja koja se zbog poriva za napredovanjem nisu obrađivala s dovoljnom strogošću, ali i koji bi dao novi odlučujući poticaj za daljnji razvitak i produbljivanje dosegnutih spoznaja.

Prvi znanstveni rad tada 19-godišnjeg Gaussa je njegova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta. Taj je problem uspio riješiti 30. ožujka 1796. i u radosnoj rasplamsalosti poklonio je svom prijatelju sa studija, mađarskom matematičaru Wolfgangu Bolyaiju, malu pločicu na kojoj je sam izveo dotični račun. Prethodnih dvije tisuće godina vjerovalo se, da se od svih pravilnih mnogokuta s neparnim brojem stranica, šestarom i ravnalom mogu konstruirati samo trokut, peterokut i petnaesterokut. Gauss ne samo da je dao konstrukciju sedamnaesterokuta, nego je još dodatno pokazao da bi se morao moći konstruirati svaki mnogokut čiji broj stranica jest takav prosti broj da kad ga se umanji za jedan, daje potenciju broja dva, čiji eksponent je opet potencija broja dva. Dotične proste brojeve danas zovemo Gaussovi prim-brojevi, a do sada ih je poznato pet: 3, 5, 17, 257, 65 537. Jedno rješenje za slučaj 257-terokuta objavio je kasnije Richelot, a Hermes je uspio doći do rezultata za 65 537-terokut tijekom desetgodišnjeg istraživanja. Gaussova teorija diobe kruga, na kojoj se zasnivaju ove činjenice, tvori jedno poglavlje 1801. godine objavljenog Gaussovog remekdjela "Disquisitiones arithmeticae", koje čini osnove moderne teorije brojeva.

Godine 1799. Gauss je u Helmstedtu stekao akademski stupanj doktora na temelju rada u kojem je dao prvi nepobitan dokaz tzv. Fundamentalnog teorema algebre, koji govori o egzistenciji korijena algebarskih jednadžbi.

Jak poticaj za neki problem primijenjene matematike dobio je mladi Gauss 1. siječnja 1801. g. kad je Piazzi otkrio Ceres, prvi od takozvanih malih planeta ili asteroida. Gauss si je postavio zadatak izračunati Keplerovo gibanje nove zvijezde čije promatranje je bilo ograničeno na vrlo mali interval. Taj problem vodi do jednadžbe 8. stupnja i za njezino rješavanje bile su potrebne opsežne metode približnog računa, koje je Gauss s tim u svezi najprije morao savladati. Na temelju njegovih rezultata Ceres je odista ponovno otkriven i taj je uspjeh priskrbio Gaussu prve trenutke slave. Na temelju ovih

radova, koje je dalje razradio, stvorio je svoje veliko djelo objavljeno 1809. godine, “Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium”, koje je postalo upravo zakon računske astrononije.

Kao direktor zvjezdarnice u Göttingenu Gauss se bavio izračunavanjem smetnji Pallasa, druge male planete koju je 28. ožujka 1802. otkrio Olbers. Tu zadaću, koja je iziskivala golem računski posao, dotjerao je jako daleko, ali je ipak nije uspio privesti kraju. Unatoč tome je bavljenje tom zadaćom postalo neobično plodno, o čemu svjedoče tri velike rasprave izašle 1812., 1814. i 1818. godine. One se tiču, za matematičku analizu, vrlo važnog hipergeometrijskog reda, problema mehaničke kvadrature i metode sekularnih smetnji.

Godine 1816. Gaussu je povjeren zadatak provesti zemljišni izmjer Hannovera. Podvrgnuo se tom, za tadašnje prilike, vrlo teškom zadatku sa samo njemu svojstvenom energijom. Sam je radio na dotičnim mjerenjima od 1821. do 1825. godine, no cjelokupni posao završili su njegovi pomoćnici tek 1841. Znanstveni rezultat tog posla čini nekoliko važnih geodetskih članaka, od kojih valja posebice istaknuti “Metodu najmanjih kvadrata” objavljenu 1821. i 1823. godine. Ta metoda izjednačavanja prekobrojnih promatranja ostala je do danas nenadomjestiv priručni alat za računanje u geodeta. Gaussova hipotetička očekivanja, koja se nadovezuju na njegove geodetske radove, otišla su još puno dalje. Njegova, 1827. izašla rasprava, “Disquisitiones circa superficies curvas” bavi se geometrijom zakrivljenih ploha. Nakon što ju je Riemann proširio na više dimenzije, ova je klasična rasprava izrasla, u novije vrijeme posebice pod rukama talijanskih matematičara – spomenimo poimence Riccija – u impozantnu građevinu višedimenzionalne diferencijalne geometrije, grane geometrije koja bi u razvoju moderne fizike trebala odigrati presudnu ulogu.

Na skupštini prirodoslovnih znanstvenika u Berlinu 1828. godine Gauss je upoznao Alexandera von Humboldta. Kasnije se to poznanstvo razvilo u prijateljstvo koje je trajalo cijeli život. Na Humboldtov poticaj počeo se Gauss, zajedno s 27 godina mladim Wilhelmom Weberom, baviti ispitivanjima magnetizma Zemlje. Iz te fizikalno orijentirane aktivnosti proizašla je 1832. godine značajna rasprava o apsolutnoj mjeri pri magnetskim mjerenjima, te daljnje rasprave koje potječu iz razdoblja od 1838. do 1840. godine o magnetizmu Zemlje i o teoriji potencijala. Rezultat od tehničkog značenja nastao iz zajedničke suradnje Gaussa i Webera je općepoznata konstrukcija elektromagnetskog telegrafa.

Pored ovih istaknutih doprinosa, koji su još za Gaussova života bili poznati, našlo se u njegovoj ostavštini mnoštvo rezultata koje on nije objavio, a koje su neovisno o njemu kasnije ponovno otkrili drugi matematičari. Tako je on još kao mladić imao dalekosežna saznanja iz područja eliptičkih funkcija. Najviše tih rezultata su kasnije ponovno našli Jacobi, te posebno genijalni, ali nesretni Norvežanin Niels Henrik Abel (1802. – 1829.). Gauss se također pozabavio prastarim problemom aksioma paralelnosti. On je došao do potpune spoznaje o mogućnosti postojanja neeuklidske geometrije, koja je kasnije, kroz članke Mađara Bolyaija, sina već spomenutog Wolfganga Bolyaija, i Rusa Lobačevskog, postala opće dobro matematičara. To što Gauss te stvari nije sam objavio treba pripisati njegovoj neuobičajenoj savjesnosti koja ga je tjerala pustiti u tisak samo potpuno sazrele, formom i sadržajem do zadnje sitnice dotjerane radove.

Unatoč velikim znanstvenim uspjesima i izvana gledano mirnome životnom putu, Gaussu je nedostajalo sreće i zadovoljstva. Lista li se njegov dnevnik, jedini dokument u kojem se otvoreno očituje njegova zatvorena i povučena priroda, može se pored dubokoumnih formula naići i na ovu rečenicu, napisanu finim potezima olovke: “Smrt mi je draža od ovakvog života.” Ove riječi, obuzete svojom prostodušnom tragičnošću,

bacaju jarke iskre svjetlosti na duševno stanje velikog čovjeka, čiji mu prometejski duh nije davao mira ni dopuštao odmora, već ga je uvijek tjerao dalje k novim izazovima. Njegov posao ne samo da je tražio najveću koncentraciju, nego često i golema izračunavanja, koja je znao provoditi žilavom ustrajnošću i gotovo nečovječnom marljivošću. Nesumnjivo su morali postojati periodi iscrpljenosti i obeshrabrenosti, koji su mogli narasti do zasićenja životom. Dodatno, Gauss je upravo u to vrijeme – riječ je o 1807. godini – imao i materijalnih problema, a trpio je i zbog pomanjkanja razumijevanja svoje najbliže okoline, koja nije mogla shvatiti da svoju radnu energiju posvećuje tako nepraktičnim stvarima. Usud kojeg velikani rijetko ostanu pošteđeni.

Gauss je umro 23. veljače 1855.

Obuhvati li se silno životno djelo ovog pravog titana ljudske duhovnosti, te želi li se naći sličnu pojavu u povijesti matematike, izronit će na vidjelo još možda jedino Arhimedov lik. Taj je Grk razumio, jureći nadaleko ispred svog vremena, razriješiti pitanja koja pripadaju krugu problema integralnog računa, matematičkog alata kojeg su nam gotovo dva tisućljeća kasnije podarili Leibniz i Newton. Njegov majstorski prikaz kvadrature segmenta parabole primjer je starogrčke misaone oštrine te se odupire čak i današnjim zahtjevima za logičkom strogošću.

Kada danas bacimo pogled unazad na život i djelo Karla Friedricha Gaussa, tog najistaknutijeg matematičara uopće, onda je to trebao biti simbol za neslućeno širenje, koje je od Gaussovog doba iskusilo područje primjene matematike u prirodnim znanostima i tehnici, kao i za produbljivanje razumijevanja koje nam je dosadašnji razvoj te znanosti podario, počevši od najtežih problema matematičke analize, pa do sasvim temeljnih pitanja koja zadiru u područje čiste logike.

Matematika nije samo najizoštrenije oružje u našoj uspješnoj borbi za svladavanje prirodnih sila. Ona je iznad svega jedno od najotmjenijih zanimanja ljudskoga duha. Ako pod glazbom razumijevamo umjetnost tonova, onda je matematika umjetnost oštroumlja.

S njemačkog preveo: *Mario-Osvin Pavčević*

Prijevod članka objavljenog u novinama "Neue Ordnung" 1. 1. 1943., neznatno nadopunjen natuknicama samog autora.

⋆ ⋆ ⋆

PAŽNJA! — STARI BROJEVI — U našem skladištu ima starih brojeva, i to: god. XVI, br. 4; god. XXXII, br. 3; god. XXXIII, br. 4; god. XXXIV, br. 3, 4; god. XXXV, br. 3; god. XXXVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XXXVII, br. 1, 4; god. XXXIX, br. 1, 2, 3, 4; god. XL, br. 2, 3, 4; god. XLI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLII, br. 3-4; god. XLIV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVIII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLIX, br. 1, 2, 3, 4; god. L, br. 1, 2, 3, 4; god. LI, br. 1, 2, 3, 4; god. LII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIV, br. 1, 2, 3, 4; god. LV, br. 1, 2, 3, 4.

Cijena pojedinog broja je 5 kuna.

Izvanredni broj (E) – zadaci iz matematike (cijena 20 kn); Izvanredni broj (F) – Rječnik matematičkih naziva – hrvatski, engleski, njemački (cijena 30 kn).

Višedimenzionalne kugle

Josip Matejaš[1], *Zagreb*

Sažetak

Formule za površinu i volumen kugle dobro su poznate. Ovdje se pobliže upoznajemo s kuglama u četiri, pet i više dimenzija te izvodimo formule za njihov volumen.

Uvod, ili gdje je četvrta dimenzija?

Svi smo, još u osnovnoj školi, upoznali koordinatni sustav u ravnini. Dva međusobno okomita pravca (koordinatne osi) čije sjecište nazivamo ishodište i na kojima su zadane jedinične dužine. Na taj je način svaka točka ravnine jednoznačno određena s dva broja, dvije koordinate. Kažemo da je ravnina prostor s dvije dimenzije, dvodimenzionalan svijet. Na sličan način, ako promatramo samo jedan pravac, zaključujemo da je on jednodimenzionalan svijet. Svaka njegova točka jednoznačno je određena jednom koordinatom. Ako sada okomito na promatranu ravninu kroz ishodište postavimo još jedan pravac (treću koordinatnu os) dobivamo trodimenzionalni svijet u kojem svakoj točki jednoznačno pripadaju tri koordinate. Takav je svijet u kojem mi živimo i krećemo se. Ove tri osi određuju tri međusobno nezavisna smjera kretanja u prostoru: lijevo-desno, naprijed-nazad i gore-dolje. Svaki drugi smjer kretanja može se dobiti kao superpozicija (zbroj) pomaka u ta tri smjera.

Da li, osim ove tri, postoji i četvrta dimenzija? Pitanje na koje su mnogi mislioci i znanstvenici pokušavali (i pokušavaju) odgovoriti. Neki su skloni zaključku da je četvrta dimenzija vrijeme. To nije prihvatljiv odgovor jer je vrijeme kvalitativno potpuno različita veličina od preostale tri. Mi tražimo četvrtu prostornu dimenziju. To znači da se pitamo da li je moguće postaviti četvrtu koordinatnu os kroz ishodište a koja je istovremeno okomita na sve tri? Kako god to pokušali izvesti odgovor će biti negativan. Zašto? Upravo zato što se mi nalazimo u trodimenzionalnom svijetu i unutar njega pokušavamo postaviti četvrtu os što je nemoguća misija. Isto kao da pokušamo treću os postaviti u ravnini u kojoj se nalaze prve dvije. Nećemo uspjeti! Tek kad se "uzdignemo" izvan ravnine rješenje postaje jednostavno. Četvrta os mora biti postavljena izvan našeg trodimenzionalnog svijeta i to okomito na sve moguće pravce koji mu pripadaju. Upravo u toj činjenici krije se i odgovor koji se čini vrlo prihvatljiv. Problem je u nama, u našoj svijesti. Četvrta i više dimenzije postoje, kao i tri poznate, svuda oko nas samo ih naša svijest koja funkcionira trodimenzionalno ne raspoznaje. Pokušajmo s jednim jednostavnim primjerom. Ima ljudi koji ne raspoznaju neke boje (daltonisti). Iako se svakodnevno susreću s tim bojama ne prepoznaju ih jer zbog nekog urođenog poremećaja njihova svijest nema informaciju o tim bojama. Slično je s četvrtom dimenzijom. Ona

[1] Autor je docent na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu, bavi se numeričkom matematikom (trenutno točnošću nekih dijagonalizacijskih metoda za određivanje vlastitih i glavnih vrijednosti matrica), e-mail: jmatejas@efzg.hr

se ne nalazi duboko pod zemljom ili negdje u svemirskim prostranstvima, ona je svuda oko nas i u nama a može se spoznati jedino razvojem naše svijesti na višu razinu. Takve zapise nalazimo još kod drevnih istočnjačkih religija.

Napomenimo da se mnogi fenomeni poput nastajanja i nestajanja predmeta, teleportacije i telekineze i sl. pokušavaju objasniti pomoću četvrte dimenzije. Zamislimo na trenutak veliki ravni stol (ravninu) i na njemu različite dvodimenzionalne predmete (npr. izrezane iz komada papira). Predmeti se mogu pomicati po stolu u svim smjerovima. Međutim, ako neki predmet podignemo sa stola (recimo samo za 1 mm) on istog trena, za ostale "promatrače" s tog stola, jednostavno nestaje iz njihovog svijeta. Slično tome kad bi neko "superiorno biće" iz viših dimenzija neki predmet iz našeg svijeta samo malo pomaknulo u smjeru četvrte dimenzije on bi za nas trenutno nestao. Isto tako može se i bilo gdje trenutno pojaviti.

U matematici međutim, četvrta i više dimenzije uvode se vrlo jednostavno dodavanjem novih komponenti. Tako za bilo koji prirodni broj n možemo definirati realni n-dimenzionalni prostor,

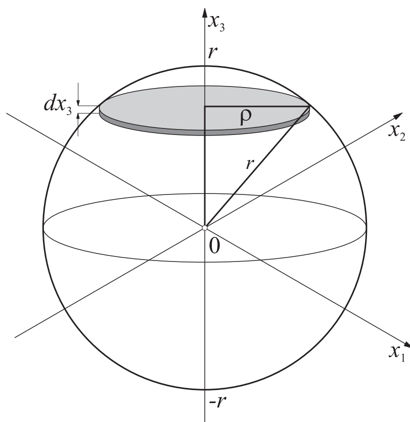
$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Geometrijski možemo predočiti prostore $\mathbf{R}$ (pravac), $\mathbf{R}^2$ (ravnina) i $\mathbf{R}^3$ (prostor) o čemu smo upravo govorili.

Kugle u n dimenzija

Znamo da u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini s koordinatnim osima x_1 i x_2 jednadžba $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, $r > 0$ definira kružnicu polumjera r sa središtem u ishodištu a nejednadžba $x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2$ krug omeđen tom kružnicom. Slično je u prostoru $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ sfera i $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant r^2$ kugla polumjera r. Poopćenjem ovih (ne)jednakosti dobivamo definiciju (kugle) sfere u n dimenzija. Dakle, n-dimenzionalna kugla $K_n(r)$ polumjera $r > 0$ sa središtem u ishodištu je skup

$$K_n(r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r^2\}. \tag{1}$$



Primijetimo da je za $n = 1$ jednodimenzionalna kugla $K_1(r) = \{x_1 : x_1^2 \leqslant r^2\} = \{x_1 : |x_1| \leqslant r\}$ a to je zatvoreni interval (dužina) duljine $2r$. Napomenimo da je

duljina $2r$ u stvari volumen te jednodimenzionalne kugle (dužine) jer je duljina u jednodimenzionalnom prostoru istovjetna s volumenom (o tome detaljnije u zadnjem odjeljku). Za $n = 2$ imamo krug a za $n = 3$ kuglu u uobičajenom smislu te riječi. Ako u definiciji (1) fiksiramo $x_n \in [-r, r]$ dobivamo $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leqslant r^2 - x_n^2 = \rho^2$ a što je definicija za $K_{n-1}(\rho)$. Dakle, presjek n-dimenzionalne kugle $K_n(r)$ hiperravninom okomitom na os x_n je $(n-1)$-dimenzionalna kugla $K_{n-1}(\rho)$, $\rho = \sqrt{r^2 - x_n^2}$ (vidi sliku). Ovu činjenicu iskoristit ćemo za određivanje volumena (zapremine) kugle $K_n(r)$.

Volumen kugli u n dimenzija

Za razumijevanje ovog odjeljka potrebno je elementarno poznavanje određenih integrala i osnovnih tehnika integriranja (metoda supstitucije). Površine i volumeni mogu se računati pomoću određenih integrala. Ako se neko geometrijsko tijelo ili lik proteže duž neke osi (pravca) x u granicama od a do b te ako presjek okomito na os x ima površinu $S(x)$ tada je volumen tog tijela $V = \int_a^b S(x)dx$. Na primjer volumen kugle s naše slike je $V = \int_{-r}^{r} \rho^2 \pi dx_3$, $\rho^2 = r^2 - x_3^2$. Slično tome, a u skladu s razmatranjem na kraju prethodnog odjeljka, kugla $K_n(r)$ definirana relacijom (1) ima volumen

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\rho(x_n))\, dx_n = \int_{-r}^{r} V_{n-1}\left(\sqrt{r^2 - x_n^2}\right) dx_n, \qquad V_1(r) = 2r. \tag{2}$$

Dakle, V_2 računamo pomoću V_1, V_3 pomoću V_2 itd. Kako $V_1(r)$ znamo, formulom (2) možemo odrediti volumen bilo koje n-dimenzionalne kugle $K_n(r)$.

Uvedemo li u integral (2) supstituciju $x_n = r \sin \varphi$ tada se granice integracije mijenjaju, $x_n = \pm r \Rightarrow \varphi = \pm \pi/2$. Pri tome je $dx_n = r \cos \varphi \, d\varphi$ i $\sqrt{r^2 - x_n^2} = r \cos \varphi$. Sada formula (2) poprima oblik

$$V_n(r) = r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_{n-1}(r \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi, \qquad V_1(r) = 2r. \tag{3}$$

Volumen $V_n(r)$ sada možemo odrediti bilo formulom (2) ili (3) ovisno koja nam je za pojedini n prikladnija. U nastavku ćemo izvesti formule za volumene kugli $K_n(r)$ u prvih sedam dimenzija. U izvodu nam trebaju sljedeća dva pomoćna rezultata. Prvo, primjenom adicionih formula i formula za dvostruke kutove dobije se:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) \\ \cos^4 \varphi &= \frac{1}{8}(3 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) \\ \cos^6 \varphi &= \frac{1}{32}(10 + 15 \cos 2\varphi + 6 \cos 4\varphi + \cos 6\varphi). \end{aligned} \tag{4}$$

Drugo, za svaki $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,...$ vrijedi:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2k\varphi)\, d\varphi = \left.\frac{\sin(2k\varphi)}{2k}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2k}\left[\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right] = 0. \qquad (5)$$

Volumen kugle u dvije dimenzije (krug)

Koristeći relaciju (3) imamo

$$V_2(r) = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1(r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r\cos\varphi\cdot\cos\varphi\, d\varphi = 2r^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= 2r^2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = r^2\left.\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= r^2\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = r^2\pi.$$

Za drugi član u gornjem integralu mogli smo iskoristiti i formulu (5).

Volumen kugle u tri dimenzije

Koristeći relaciju (2) imamo

$$V_3(r) = \int\limits_{-r}^{r} V_2\left(\sqrt{r^2 - x_3^2}\right) dx_3 = \int\limits_{-r}^{r}(r^2 - x_3^2)\,\pi\, dx_3 = \pi\left.\left(r^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3}\right)\right|_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Volumen kugle u četiri dimenzije

Koristeći relacije (3) i (4) imamo

$$V_4(r) = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} V_3(r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}r^3\cos^3\varphi\cdot\pi\cdot\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}r^4\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}r^4\pi\cdot\frac{1}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\, d\varphi.$$

Uvažimo li relaciju (5) dobivamo

$$V_4(r) = \frac{4}{3}r^4\pi \cdot \frac{1}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\,d\varphi = \frac{1}{6}r^4\pi \cdot 3\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}r^4\pi\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}r^4\pi^2,$$

Volumen kugle u pet dimenzija

Koristeći relaciju (2) imamo

$$V_5(r) = \int\limits_{-r}^{r} V_4\left(\sqrt{r^2 - x_5^2}\right)dx_5 = \int\limits_{-r}^{r}\frac{1}{2}\left(r^2 - x_5^2\right)^2\pi^2\,dx_5 = \frac{\pi^2}{2}\int\limits_{-r}^{r}\left(r^4 - 2r^2x_5^2 + x_5^4\right)dx_5$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(r^4x_5 - \frac{2}{3}r^2x_5^3 + \frac{x_5^5}{5}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{\pi^2}{2}\left[\left(r^5 - \frac{2}{3}r^5 + \frac{r^5}{5}\right) - \left(-r^5 + \frac{2}{3}r^5 - \frac{r^5}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{16}{15}r^5 = \frac{8}{15}r^5\pi^2.$$

Volumen kugle u šest dimenzija

Koristeći relacije (3) i (4) imamo

$$V_6(r) = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} V_5(r\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{15}r^5\cos^5\varphi\cdot\pi^2\cdot\cos\varphi\,d\varphi = \frac{8}{15}r^6\pi^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{8}{15}r^6\pi^2\cdot\frac{1}{32}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi)\,d\varphi.$$

Uvažimo li relaciju (5) dobivamo

$$V_6(r) = \frac{8}{15}r^6\pi^2\cdot\frac{1}{32}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 10\,d\varphi = \frac{1}{60}r^6\pi^2\cdot 10\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{6}r^6\pi^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{6}r^6\pi^3.$$

Volumen kugle u sedam dimenzija

Koristeći relaciju (2) imamo

$$V_7(r) = \int\limits_{-r}^{r} V_6\left(\sqrt{r^2 - x_7^2}\right)dx_7 = \int\limits_{-r}^{r}\frac{1}{6}\left(r^2 - x_7^2\right)^3\pi^3\,dx_7$$

$$= \frac{\pi^3}{6} \int_{-r}^{r} \left(r^6 - 3r^4x_7^2 + 3r^2x_7^4 - x_7^6\right) dx_7 = \frac{\pi^3}{6} \left(r^6x_7 - r^4x_7^3 + \frac{3}{5}r^2x_7^5 - \frac{x_7^7}{7}\right)\Big|_{-r}^{r}$$

$$= \frac{\pi^3}{6} \cdot 2\left(r^7 - r^7 + \frac{3}{5}r^7 - \frac{1}{7}r^7\right) = \frac{\pi^3}{3} \cdot \frac{16}{35}r^7 = \frac{16}{105}r^7\pi^3.$$

I tako dalje ... ! Čitatelji mogu nastaviti sami. Za kontrolu navodimo još nekoliko slučajeva:

$$V_8(r) = \frac{1}{24}r^8\pi^4, \qquad V_9(r) = \frac{32}{945}r^9\pi^4, \qquad V_{10}(r) = \frac{1}{120}r^{10}\pi^5, \quad \dots$$

Vidimo da je za neparni n prikladnija formula (2), a za parni (3). Isto tako zgodno je primijetiti da se potencija od π povećava za 1 za svaki sljedeći parni n. Može se pokazati da vrijede sljedeće općenite formule posebno za parni i neparni n. Za svaki $k = 1, 2, 3, \dots$ je

$$V_{2k}(r) = \frac{1}{k!}r^{2k}\pi^k, \qquad V_{2k+1}(r) = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}r^{2k+1}\pi^k.$$

Mjerenje volumena u n dimenzija

Znamo da se volumen u našem trodimenzionalnom svijetu mjeri kubičnim jedinicana, npr. m^3, dm^3, cm^3, ... Svaka ta jedinica je kocka (nazovimo je 3-kocka) brida 1 m, 1 dm, 1 cm, ... Slično se površina (volumen u dvije dimenzije) mjeri kvadratnim jedinicama a jedinica je kvadrat (kocka u dvije dimenzije, 2-kocka). U jednodimenzionalnom svijetu volumen je ustvari, s našeg stajališta, duljina pa se mjeri dužnim jedinicama m, dm, cm, ... a jedinica je jedinična dužina (kocka u jednoj dimenziji, 1-kocka). Kako se volumen mjeri u četiri dimenzije? Jedinica za mjerenje je četverodimenzionalna kocka (nazovimo je 4-kocka) jediničnog brida, pa imamo m^4, dm^4, cm^4, ... Kako izgleda 4-kocka? Znamo da je "obična" 3-kocka omeđena sa 6 kvadrata (2-kocke), ima 12 bridova (1-kocke) i 8 vrhova (točke ili 0-kocke). 4-kocka je, međutim, omeđena s osam 3-kocki (po svakoj od 4 koordinatne osi dvije 3-kocke na suprotnim stranama). Dvije susjedne 3-kocke imaju po jednu stranu (2-kocku) zajedničku, tako da 4-kocka ima 24 dvodimenzionalna ruba (to su 2-kocke tj. kvadrati). Svaka tri susjedna kvadrata imaju po jednu zajedničku stranicu (dužinu, 1-kocku) pa tako 4-kocka ima 32 jednodimenzionalna brida (dužine). Na kraju 4-kocka ima 16 vrhova a u svakom se spajaju 4 brida. Možete li zamisliti tu "monstruoznu" četverodimenzionalnu kocku omeđenu s 8 trodimenzionalnih kocki a kojoj su rubovi 24 kvadrata, 32 dužine su bridovi i ima 16 vrhova? Previše zahtjevno u svakom pogledu! A da ne govorimo o kockama u pet ili više dimenzija.

O linearnom programiranju, IV, 1. dio

Luka Neralić[1] *, Zagreb*

Dualitet u linearnom programiranju. Uvod

Dualitet ima važnu ulogu u matematičkom programiranju općenito, a posebno u linearnom programiranju. Na tom pojmu osnivaju se mnogi teorijski rezultati, kao i metode i algoritmi za rješavanje različitih problema linearnog programiranja. Osim toga, značajna je interpretacija rješenja tzv. dualnog problema za polazni ili primarni problem, posebno ekonomska. (Vidi npr. Neralić [10], str. 82–83, 114–123, Martić [5], str. 77–87, 96–98, Hadley [1], str. 221–266, 483–487, Murty [6], str. 182–220, 249–265, Wu, Coppins [11], str. 110–126, 142–147, Nash, Sofer [7], str. 144–163, 464–480, Hillier, Lieberman [2], str. 230–254.)

Primjer 10. Razmotrimo sljedeći primjer problema alokacije resursa. Dva proizvoda izrađuju se na tri grupe strojeva. Utrošeni sati rada po jedinici proizvoda, kapaciteti grupa strojeva (u satima) i profit po jedinici proizvoda (u tisućama kuna), navedeni su u tabeli 1. Problem se sastoji u tome da se s raspoloživim resursima ostvari proizvodnja za koju će ukupan profit biti maksimalan.

grupe strojeva	utrošeni sati P_1	po jedinici proizvoda P_2	kapaciteti strojeva
S_1	5	4	600
S_2	1	2	240
S_3	5	2	500
profit	70	80	

Tabela 1. Podaci za primjer alokacije resursa.

Neka je x_1 odnosno x_2 nepoznata količina proizvoda P_1 odnosno P_2 koju treba proizvesti uz zadane uvjete. Tada se postavljeni problem može formulirati kao linearni program maksimizacije u standardnom obliku:

$$\max z = 70x_1 + 80x_2$$

[1] Autor je redoviti profesor na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: lneralic@efzg.hr

uz ograničenja

$$\begin{aligned} 5x_1 &+ 4x_2 \leqslant 600 \\ x_1 &+ 2x_2 \leqslant 240 \\ 5x_1 &+ 2x_2 \leqslant 500 \\ x_1 \geqslant 0&, \ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Svođenjem tog problema na kanonski oblik pomoću dopunskih varijabli x_3, x_4 i x_5 dobivamo sljedeći problem linearnog programiranja

$$\max z = 70x_1 + 80x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{lllll} 5x_1 + 4x_2 & + \ x_3 & & & = 600 \\ x_1 + 2x_2 & + & + \ x_4 & & = 240 \\ 5x_1 + x_2 & & & +x_5 & = 500 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ x_4 \geqslant 0, \ x_5 \geqslant 0.$$

Taj se problem dalje može svesti na oblik (vidi Neralić [9], str. 204–205) u kojem je funkcija cilja z stalna bazična varijabla, za koju želimo doseći maksimalnu vrijednost, uz ograničenje

$$z - 70x_1 - 80x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0,$$

i uz sva preostala gornja ograničenja. Simpleks metodom dobiveno je rješenje promatranog problema, koje se može očitati iz treće simpleks tablice tabele 2. Naime, u toj tablici u retku s indeksom 0 su svi elementi nenegativni, pa je odgovarajuće bazično moguće rješenje optimalno. Pritom su bazične varijable $x_1^* = 40$, $x_2^* = 100$, $x_5^* = 100$, dok su nebazične varijable $x_3^* = 0$ i $x_4^* = 0$. Osim toga, optimalna vrijednost funkcije cilja je $z^* = 10\,800$ tisuća kuna i to je maksimalan profit. Istaknimo, kako zamjenom optimalnih vrijednosti varijabli u ograničenja problema proizlazi da su kapaciteti prve i druge grupe strojeva u potpunosti iskorišteni $(x_3^* = 0$ i $x_4^* = 0)$, dok kod treće grupe strojeva imamo neiskorišteni kapacitet od 100 sati $(x_5^* = 100)$.

ind. ret. i	baz. var.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	z	1	-70	-80	0	0	0	0
1	x_3	0	5	4	1	0	0	600
2	x_4	0	1	2^*	0	1	0	240
3	x_5	0	5	2	0	0	1	500
0	z	1	-30	0	0	40	0	9 600
1	x_3	0	3^*	0	1	-2	0	120
2	x_2	0	$1/2$	1	0	$1/2$	0	120
3	x_5	0	4	0	0	-1	1	260
0	z	1	0	0	10	20	0	10 800
1	x_1	0	1		$1/3$	$-2/3$	0	40
2	x_2	0	0	1	$-1/6$	$5/6$	0	100
3	x_5	0	0	0	$-4/3$	$5/3$	1	100

Tabela 2. Simpleks tablice u rješavanju primjera 10.

Postavlja se pitanje za koliko bi se tisuća kuna (približno) promijenio optimalni profit $z^* = 10\,800$, ako bi se, recimo, kapacitet prve grupe strojeva povećao za jednu jedinicu, tj. sa 600 sati na 601 sat? Isto pitanje može se postaviti za drugu, odnosno treću grupu strojeva. Odgovore na ta pitanja dat će nam rješenje tzv. dualnog problema, kojeg ćemo formulirati najprije za razmatrani primjer tzv. **standardnog problema maksimizacije**

$$\max z(x_1, x_2) = 70x_1 + 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,} \end{array}$$

u kojem se maksimizira funkcija cilja, dok su ograničenja u obliku nejednadžbi tipa $\leqslant$, a sve varijable moraju zadovoljavati ograničenje nenegativnosti.

Naime, polazeći od promatranog problema, kojeg nazovimo **primarnim problemom** (ili **primalom**), do **dualnog problema** (ili **duala**) doći ćemo uvođenjem varijabli λ_1, λ_2 i λ_3, koje odgovaraju prvom, drugom i trećem ograničenju primala, respektivno. Koeficijenti u funkciji cilja dualnog problema, koju ćemo označiti s $h(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ i minimizirati, bit će koeficijenti desnih strana ograničenja primala 600, 240 i 500. To znači da će dualni problem biti problem

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 600\lambda_1 + 240\lambda_2 + 500\lambda_3$$

uz pripadna ograničenja. Naime, svakoj varijabli primarnog problema odgovarat će jedno ograničenje u dualu, koje će biti nejednadžba tipa $\geqslant$, i u njemu će na lijevoj strani biti zbroj produkata koeficijenata u stupcu uz tu varijablu i odgovarajućih dualnih varijabli, a na desnoj strani koeficijent u funkciji cilja primala uz tu varijablu. Prema tome, varijabli x_1 odgovarat će u dualu ograničenje

$$5\lambda_1 + 1\lambda_2 + 5\lambda_3 \geqslant 70.$$

Na lijevoj strani tog ograničenja su troškovi resursa za proizvodnju jedinice proizvoda P_1, dok je na desnoj strani profit po jedinici tog proizvoda. Prema tome, to ograničenje u dualu izražava činjenicu da profit po jedinici tog proizvoda ne može biti veći od troškova resursa potrebnih za njegovu proizvodnju. Analogno tome vrijedi i za varijablu x_2, kojoj odgovara ograničenje

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geqslant 80.$$

Pritom funkcija cilja duala predstavlja ukupnu vrijednost raspoloživih resursa. Kako su sva ograničenja u primalu tipa $\leqslant$, tada za dualne varijable koje im odgovaraju, mora vrijediti ograničenje nenegativnosti, tj.

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.$$

Dakle, dualni problem (ili dual) polaznog primarnog problema je

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 600\lambda_1 + 240\lambda_2 + 500\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcr} 5\lambda_1 + 1\lambda_2 + 5\lambda_3 & \geqslant & 70 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & \geqslant & 80 \\ \multicolumn{3}{c}{\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.} \end{array}$$

Napomenimo da se u ovom slučaju radi o tzv. simetričnom obliku dualiteta, gdje je dualni problem tzv. standardni problem minimizacije.

Istaknimo da je uz optimalno rješenje primarnog problema simpleks metodom, u posljednjoj simpleks tablici tabele 2 također dobiveno i optimalno rješenje dualnog problema, u retku s indeksom 0 ispod dopunskih varijabli. To rješenje je $\lambda_1^* = 10$, $\lambda_2^* = 20$ i $\lambda_3^* = 0$. Lako je provjeriti da je optimalna vrijednost funkcije cilja duala $h^* = 10\,800$, što znači da su optimalne vrijednosti funkcija cilja primala i duala jednake. Za optimalne vrijednosti dualnih varijabli kažemo da su "**cijene u sjeni**" ili "**dualne cijene**" ili "**oportunitetni troškovi**". Naime, dualne cijene predstavljaju određenu "vrijednost" jednog sata odgovarajuće grupe strojeva, što konkretno znači da je za proizvođača, čiji se proizvodni program razmatra, vrijednost jednog sata prve, druge i treće grupe strojeva jednaka $\lambda_1^* = 10$, $\lambda_2^* = 20$ i $\lambda_3^* = 0$, respektivno. Osim toga, optimalna vrijednost dualne varijable predstavlja približnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja primarnog problema, koja je rezultat povećanja koeficijenta desne strane ograničenja, kojemu odgovara ta varijabla, za jednu jedinicu. To u razmatranom primjeru znači da bi povećanje kapaciteta prve grupe strojeva sa 600 sati na 601 sat, rezultiralo povećanjem maksimalnog profita $z^* = 10\,800$ za približno $\lambda_1^* = 10$, tj. na 10 810. Slična je interpretacija za drugu grupu strojeva i $\lambda_2^* = 20$. Kako kapacitet treće grupe strojeva nije u potpunosti iskorišten (postoji višak od $x_5^* = 100$ sati), njegova dualna cijena jednaka je nuli, tj. $\lambda_3^* = 0$. Naime, uz povećanje kapaciteta te grupe strojeva s 500 na 501, optimalna vrijednost profita ostala bi nepromijenjena, jer je $\lambda_3^* = 0$. Optimalna vrijednost dualne varijable također predstavlja i "oportunitetni trošak", jer se može usporediti povećanje profita i vrijednost ulaganja u proširenje kapaciteta za jednu jedinicu, te vidjeti isplati li se proširenje kapaciteta. Ukoliko je vrijednost ulaganja veća od povećanja profita, proširenje kapaciteta se ne isplati.

Pokažimo još na promatranom primjeru da je dual od duala jednak primalu. Naime, dualni problem može se pisati u ekvivalentnom obliku

$$\max \overline{h}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -600\lambda_1 - 240\lambda_2 - 500\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} -5\lambda_1 - 1\lambda_2 - 5\lambda_3 &\leqslant -70 \\ -4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &\leqslant -80 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0,$$

pri čemu je $\min h = -\max \overline{h}$. Uvođenjem dualnih varijabli x_1 i x_2, koje odgovaraju prvom i drugom ograničenju duala, istim postupkom kao i ranije u formuliranju dualnog problema, dobivamo dual tog problema u obliku

$$\min \overline{z}(x_1, x_2) = -70x_1 - 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} -5x_1 & - & 4x_2 & \geqslant & -600 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \geqslant & -240 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & \geqslant & -500 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Dobiveni se problem može napisati u ekvivalentnom obliku kao

$$\max z(x_1, x_2) = 70x_1 + 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0,$$

gdje je $\min \overline{z} = -\max z$, a to je upravo primarni problem (ili primal). (Vidi npr. Hadley [1], str. 222–224.) Napomenimo da ta tvrdnja vrijedi i u općem slučaju.

Na temelju dosadašnjih razmatranja možemo navesti ova pravila za formuliranje dualnog problema za zadani standardni problem maksimizacije (ili minimizacije): (a) Svakom ograničenju primala treba pridružiti jednu varijablu u dualu; (b) Koeficijenti desnih strana ograničenja u primalu postaju koeficijenti funkcije cilja u dualu; (c) Koeficijenti funkcije cilja u primalu postaju koeficijenti desnih strana ograničenja u dualu; (d) Svakoj varijabli primala treba pridružiti jedno ograničenje u dualu; (e) Ograničenja tipa $\leqslant$ (odnosno $\geqslant$) u primalu prelaze u ograničenja tipa $\geqslant$ (odnosno $\leqslant$); (f) Koeficijenti u stupcu uz varijablu primala postaju koeficijenti uz varijable u retku koji je ograničenje duala; (g) Ako je primal problem maksimizacije (odnosno minimizacije), dual je problem minimizacije (odnosno maksimizacije); (Vidi npr. Wu, Coppins [11], str. 115–116. Napomenimo da autori nazivaju kanonskim oblikom problem koji se kod nas naziva standardnim oblikom problema linearnog programiranja.)

Postavlja se pitanje kako izgleda dualni problem ako je u primalu neko ograničenje u obliku jednadžbe? Zatim, kako formulirati dual problema u kojem na neku varijablu nema ograničenja nenegativnosti? Odgovore na ta pitanja dat ćemo u sljedećim primjerima.

Primjer 11. Razmotrimo ovaj problem linearnog programiranja

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 32 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

Istaknimo da je prvo ograničenje u obliku jednadžbe, što znači da problem nije u standardnom obliku. Zbog toga je potrebno najprije prevesti ga u standardni oblik, a to je moguće zamjenom jednadžbe $x_1 + x_2 = 10$ dvjema nejednadžbama

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leqslant & 10 \\ x_1 & + & x_2 & \geqslant & 10. \end{array}$$

Kako sva ograničenja moraju biti tipa $\leqslant$, potrebno je još drugu nejednadžbu pomnožiti s -1 i pisati je u obliku $-x_1 - x_2 \leqslant -10$. Na taj način dobivamo promatrani problem u ekvivalentnom standardnom obliku

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 \leqslant 10\\ -x_1 &- x_2 \leqslant -10\\ 2x_1 &+ 4x_2 \leqslant 32\\ 3x_1 &+ x_2 \leqslant 24\\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Primjenom navedenih pravila, uz uvođenje dualnih varijabli λ_1', λ_1'', λ_2 i λ_3, dobivamo dualni problem u obliku

$$\min h(\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1' - 10\lambda_1'' + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} \lambda_1' - \lambda_1'' + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &\geqslant 12\\ \lambda_1' - \lambda_1'' + 4\lambda_2 + \lambda_3 &\geqslant 8\\ \lambda_1' \geqslant 0,\ \lambda_1'' \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ako uvedemo varijablu $\lambda_1 = \lambda_1' - \lambda_1''$, pri čemu vrijedi $\lambda_1' \geqslant 0$, $\lambda_1'' \geqslant 0$, tada je očigledno da varijabla λ_1 može poprimiti negativne vrijednosti (za $\lambda_1' < \lambda_1''$), vrijednost jednaku nuli (za $\lambda_1' = \lambda_1''$), te pozitivne vrijednosti (za $\lambda_1' > \lambda_1''$). Tada se uz pomoć varijable λ_1, na koju nema ograničenja nenegativnosti, dual može pisati u obliku

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1 + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) &\geqslant 12\\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3) &\geqslant 8\\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Prema tome, pokazali smo da za neko ograničenje u obliku jednadžbe u primalu, na odgovarajuću dualnu varijablu u dualu nema ograničenja nenegativnosti. To znači da navedenim pravilima za formuliranje duala možemo dodati i pravilo: (h) Ako je ograničenje u primalu u obliku jednadžbe, na pridruženu dualnu varijablu u dualu nema ograničenja nenegativnosti.

Primjer 12. Sada ćemo razmotriti nešto izmijenjen primjer 11, u sljedećem obliku

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 \leqslant 10\\ 2x_1 &+ 4x_2 \leqslant 32\\ 3x_1 &+ x_2 \leqslant 24\\ &x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Istaknimo da na varijablu x_2 nema ograničenja nenegativnosti. Za svođenje problema u standardni oblik uvest ćemo varijable $x_2' \geqslant 0$ i $x_2'' \geqslant 0$ i izvršiti zamjenu $x_2 = x_2' - x_2''$. Na taj način dobivamo ekvivalentni oblik promatranog problema

$$\max z(x_1, x_2', x_2'') = 12x_1 + 8x_2' - 8x_2''$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2' - x_2'' \leqslant 10\\ 2x_1 &+ 4x_2' - 4x_2'' \leqslant 32\\ 3x_1 &+ x_2' - x_2'' \leqslant 24\\ x_1 \geqslant 0,&\ x_2' \geqslant 0,\ x_2'' \geqslant 0. \end{aligned}$$

Dual tako dobivenog problema je

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1 + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 12 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 & \geqslant & 8 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 & \geqslant & -8 \\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Posljednja dva ograničenja $\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 8$ i $-\lambda_1 - 4\lambda_2\lambda_3 \geqslant -8$ ekvivalentna su jednom ograničenju u obliku jednadžbe $\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 8$, pa se dual može pisati u obliku

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1 + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 12 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 & = & 8 \\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Primijetimo da je ograničenje što odgovara varijabli x_2, na koju u primalu nema ograničenja nenegativnosti, u dualu u obliku jednadžbe. Dakle, imamo još jedno pravilo za konstrukciju duala: (i) Varijabli u primalu bez ograničenja nenegativnosti, u dualu odgovara ograničenje u obliku jednadžbe.

Literatura

[1] G. HADLEY, *Linear Programming*, Addison Wesley, Reading, MA, 1962.

[2] F. S. HILLIER AND G. J. LIEBERMAN, *Introduction to Operations Research*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 2001.

[3] M. INTRILIGATOR, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971. (Ruski prijevod: Progress, Moskva, 1975.)

[4] S. KUREPA, L. NERALIĆ, *Matematika 3*, Udžbenik i zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

[5] LJ. MARTIĆ, *Matematičke metode za ekonomske analize*, II svezak, Treće izdanje, Narodne Novine, Zagreb, 1979.

[6] K. G. MURTY, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[7] S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, International Edition, New York, 1996.

[8] L. Neralić, *O linearnom programiranju, I*, Matematičko-fizički list, **LI** 3 (2000.–2001.), 134–140.

[9] L. NERALIĆ, *O linearnom programiranju, II*, Matematičko-fizički list, **LI** 4 (2000.–2001.), 202–211.

[10] L. NERALIĆ, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.

[11] N. WU AND R. COPPINS, *Linear Programming and Extensions*, McGraw-Hill, New York, 1981.



Kako nastaje uzgon

Maja Planinić[1], *Zagreb*

Uzmimo lopticu za stolni tenis i stavimo je u čašu punu vode. Loptica će, kako i očekujemo, plivati na vodi. Koje sile djeluju na lopticu? Tu je uvijek prisutna gravitacijska sila, usmjerena prema dolje, ali i sila usmjerena prema gore, kojom voda djeluje na lopticu, a koju nazivamo uzgonom. Dok loptica pliva, ove su dvije sile upravo u ravnoteži.

Načinimo sada ovakav pokus: Uzmimo plastični ili stakleni lijevak i stavimo u njega lopticu. Držimo lijevak iznad neke posude, te ulijmo čašom vodu u lijevak. Lijevak se napunio vodom, voda polako istječe, a loptica ... loptica stoji na dnu lijevka, ispod vode!

Zašto loptica ne pliva?

Prije nego odgovorimo na to pitanje, začepimo prstom otvor lijevka, kroz koji istječe voda. Loptica je ponovno na površini vode!

Da bismo razumjeli zašto je loptica u prvom dijelu pokusa bila pod vodom, moramo razmisliti o sili uzgona. Uzgon se javlja zbog toga što u tekućinama (a i plinovima) postoji razlika tlakova na različitim dubinama. Što je dubina veća, i tlak je veći. Kad je neko tijelo uronjeno u tekućinu, na njega s donje strane djeluje veći hidrostatski tlak nego s gornje strane. Bočni tlakovi su jednaki sa svih strana na istoj dubini, te se sile, koje oni proizvode na tijelo, međusobno poništavaju. No, sile odozdo i odozgo se neće poništiti, jer je sila odozdo veća od one odozgo. Stoga će na tijelo uronjeno u tekućinu djelovati rezultantna sila prema gore – uzgon.

No, vratimo se našoj loptici u lijevku. Dok voda istječe kroz lijevak, loptica ne pliva. Premda izgleda kao da je potpuno uronjena u vodu, s njene donje strane nema vode. Stoga na lopticu s donje strane djeluje tek atmosferski tlak, dok s gornje strane osim atmosferskog tlaka djeluje i hidrostatski tlak vode. Tlak odozdo manji je nego ovaj odozgo, i uzgona nema. Začepimo li prstom otvor lijevka, stvara se stupac tekućine ispod loptice, a time se javlja i hidrostatski tlak odozdo, pa onda i sila uzgona na lopticu. I loptica ponovno pliva!

Kalendar natjecanja u matematici za učenike srednjih škola 2006. g.

— Školska natjecanja	— do 20. siječnja
— Općinska natjecanja	— 13. veljače
— Županijska natjecanja	— 14. ožujka
— "Klokan bez granica"	— 16. ožujka
— Mediteransko matematičko natjecanje	— 8. i 9. travnja
— Državno natjecanje	— od 26. do 29. travnja
— Regionalna natjecanja	— 12. svibnja
— Međunarodna matematička olimpijada	— od 6. do 18. srpnja

[1] Autorica je stručna suradnica na Fizičkom zavodu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, e-mail: maja@phy.hr



Porijeklo magnetskog polja kod kemijski neobičnih zvijezda

Ettore Tamajo[1], *Zagreb*

Ukupan je materijal na Suncu u obliku visokotemperaturne plazme. Takva materija u gibanju (npr. rotaciji, ali i konvekciji) uzrokuje nastanak magnetskog polja. Rotacija Sunca je brža na ekvatoru (oko 25 dana) nego na polovima (oko 28 dana) – to s vremenom uzrokuje promjene magnetskog polja, a posredno i neke vrlo spektakularne pojave na površini (pjege, prominencije i dr.). Magnetsko polje na površini Sunca iznosi oko 5×10^{-4} T, dok se unutar Sunčeve pjege procjenjuje na ≈ 0.1 T. Vjeruje se da su najjača zvjezdana magnetska polja $\approx 10^{11}$ T, a takve se zvijezde stoga nazivaju *magnetarima*.

Magnetizam se kod zvijezda uočava proučavanjem njihovih spektralnih linija. Spektralna linija je svijetla (ili tamna) linija na inače jednoličnom spektru, nastala kao višak (ili manjak) fotona u uskom frekventnom području u odnosu na bliske frekvencije. Modernim je uređajima moguće identificirati na tisuće linija u spektru zvijezda i njihovom analizom izvesti mnoge zaključke o kemijskom sastavu zvijezde i njenim drugim svojstvima. Proučavanje magnetizma kod zvijezda preko njihovih spektralnih linija bazira se na Zeemanovom efektu. Zeemanov efekt je razdvajanje jedne spektralne linije u više njih u prisustvu magnetskog polja. Profil i intenzitet spektralnih linija koje se opažaju u spektru zvijezda osjetljivi su, dakle, na srednju vrijednost magnetskog polja. Spektralne linije mogu biti i polarizirane, kod većine zvijezda prisutna je kružna polarizacija spektralnih linija. Razvijene su dvije osnovne spektropolarimetrijske tehnike. Jedna od njih bazirana je na spektropolarimetriji linija metala, a druga je polarimetrija širokopojasnih linija. Apsorpcijske linije iona metala relativno su zastupljene u optičkom spektru većine zvijezda i prednost njihove spektropolarimetrije jest u tome što njome dobivamo fundamentalne informacije. Glavna karakteristika kemijski neobičnih zvijezda jest neobičnost i u većini promjenjiv intenzitet spektralnih linija. Spektralne i fotometrijske promjene su periodične s podudarnosti ekstrema. Spora rotacija zvijezda je vidljiva u vrlo oštrim spektralnim linijama. I naravno prezastupljenost teških elemenata kao što su silicij, stroncij, krom i europij. Jaka magnetska polja izmjerena su za samo 5 do 10% kemijski neobičnih zvijezda gornjeg dijela glavnog niza Hertzsprung-Russelova dijagrama koji predstavlja evolucijski tok zvijezda. Zvijezde se klasificiraju u spektralne razrede koji se označavaju slovima O, B, A, F, G, K, M kako se efektivna temperatura zvijezde smanjuje. Nadalje se svaki spektralni razred dijeli na podrazrede od 0 (toplije) do 9 (hladnije).

Od kraja 19. stoljeća, nakon što je Antonia Maury otkrila neobičan spektar u zvijezda A-tipa, ta je pojava opažena u 15 do 20% zvijezda kasnoga B-, A-, i ranoga F-spektralnog tipa. Porijeklo i razvoj jakog magnetskog polja zvijezda gornjeg dijela glavnog niza nisu još u potpunosti razjašnjeni. Još se sa sigurnošću ne zna u kojoj se fazi razvoja tih zvijezda razvija magnetsko polje koje je za nekoliko redova veličine jače od polja normalnih A- i B-zvijezda. Prema jednoj teoriji ta su polja 'fosilna', odnosno,

[1] Autor je asistent na katedri za astrofiziku Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, e-mail: etamajo@phy.hr.

prisutna su još od faze prije dolaska zvijezde na glavni niz. Druga teorija govori o modelu nagnutog rotatora u kasnijoj fazi razvoja zvijezde na glavnom nizu. Istraživanja još nisu dovela do usuglašenog pogleda na razvoj magnetskog polja zvijezda. Relativno masivne Bp-zvijezde nađene su u zvjezdanim skupovima svih starosti u kojima se očekuje da se one još uvijek nalaze na glavnom nizu. Nasuprot tome, promatrački dokazi za manje masivne Ap-zvijezde nađeni su samo u starijim zvjezdanim skupovima. To predstavlja poteškoću za teoriju fosilnog polja. Međutim, jedno od mogućih objašnjenja koje ide u prilog teoriji fosilnog polja je promatrački selekcijski efekt. Budući da se radi o zvijezdama manje mase, pa tako i slabijeg sjaja, postoji mogućnost da one, zbog ograničenja prijašnjih promatračkih tehnika, nisu bile detektirane. U astronomiji, CCD-fotometrija je vrlo moćna opažačka tehnika. Kratica CCD dolazi iz engleskog jezika (*charge-coupled device*) i označava uređaj sparenih naboja na kojima počiva tehnologija današnjih instrumenata za snimanje svjetlosnih izvora. Na takvim se principima temelji i današnja CCD-fotometrija svjetlosnih izvora gdje se koriste različiti filtri propusnosti, ovisno o vrsti izvora kojeg opažamo.

Kao objekt istraživanja uzet je otvoreni zvjezdani skup NGC 6705 (M11), star 200 milijuna godina (relativno mladi skup) i bogat zvijezdama, te je vrlo prikladan za ovakvu vrstu istraživanja. Klasa zvijezda spektralnog tipa A s vrlo specifičnim spektrima, poznatih pod imenom "Ap-zvijezde", posjeduju linije silicija, kroma i nekih drugih elemenata. Danas su one poznate pod skupnim imenom "kemijski neobične", odnosno "CP-zvijezde" (od *engl.* chemically peculiar). Kemijski neobične zvijezde mogu se podijeliti u razne podgrupe, ovisno o jakosti njihovog magnetskog polja i njihovim drugim svojstvima. Grupa λ-Bootis smatra se još jednom podgrupom zvijezda kasnog B- do ranog F-spektralnog tipa, koje su bez značajnog magnetskog polja, sa slabom zastupljenošću teških elemenata (gdje C, N, O i S pokazuju gotovo sunčevu zastupljenost). Zvijezde spektralnog tipa A- glavnog niza pojavljuju se u području HR-dijagrama gdje modeli atmosfera temeljeni na hidrostatskoj ravnoteži dobro opisuju opaženi spektar. Promjene se uočavaju u intenzitetu spektralnih linija, jakosti magnetskog polja te u luminozitetu i boji. Model koji najbolje prikazuju takve promjene je model nagnutog rotatora. Temeljna postavka tog modela jest nepodudarnost osi magnetskog polja s osi rotacije zvijezde. Pretpostavlja se da je polje "zamrznuto" na površini zvijezde te da rotira zajedno sa zvijezdom. Klasične Ap-zvijezde imaju temperaturu kao normalne A-zvijezde i po spektralnom se tipu kreću u rasponu od kasnog B- do kasnog A-. Magnetska polja se od nedavno zamjećuju u He-jakim i He-slabim Bp-zvijezdama i danas se zna da se pojava nagnutog rotatora pojavljuje kod zvijezda od spektralnog tipa B2- prema kasnijim spektralnim tipovima. Postoje dvije hipoteze koje se odnose na prisutnost magnetskog polja kod zvijezda u području gornjeg dijela glavnog niza. Prva govori o postojanosti "fosilnog" magnetskog polja koje generira međuzvjezdana materija. Druga govori o postojanju nekog mehanizma poput dinama u samoj konvektivnoj jezgri zvijezde. Obje su teorije suočene s poteškoćama. Teorija "fosilnog" polja pretpostavlja da su polja stabilna tijekom stotina milijuna godina, a prema teoriji o postojanosti dinama unutar same jezgre očekivala bi se jaka veza između jakosti polja i perioda rotacije zvijezde, što se također ne opaža. Nedavno je otkriveno da se kemijski neobične zvijezde s trostruko manjom masom od mase Sunca nalaze u središnjem području glavnog niza. Smatra se da se magnetsko polje zvijezde stvara nakon što je zvijezda provela barem trećinu ukupnog vremena koje provodi na glavnom nizu. Suprotno toj tezi, neki znanstvenici tvrde da kemijski neobične zvijezde zauzimaju cijelo područje glavnog niza kao i normalne zvijezde istog spektralnog raspona. Maitzen (1976) sa suradnicima pronalazi dvokomponentnu uskopojasnu depresiju, sa središtem pri $\lambda 5175$

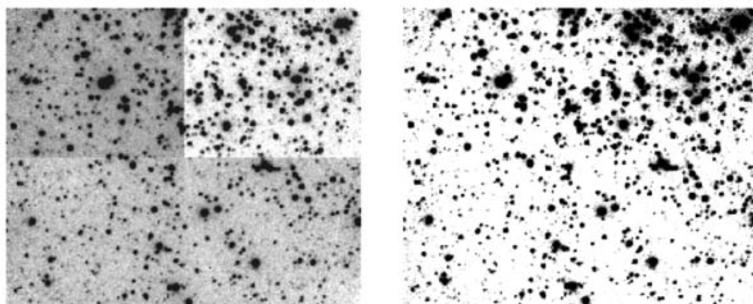
Å te širokopojasnu komponentu sa središtem pri $\lambda 5250 - \lambda 5300$ Å. Model depresije toka zračenja na višim se temperaturama pokazao padajućim a ne rastućim. Prisustvo depresije toka zračenja kod kemijski neobičnih zvijezda pri $\lambda 5200$ Å navelo je Maitzena da uvede Δa sustav fotometrijskih filtara kao sredstvo za dijagnosticiranje te depresije. Maitzenova Δa metoda utvrđuje dubinu depresije toka zračenja putem usporedbe tokova zračenja u nizu uskopojasnih fotometrijskih filtara. Tok u središtu depresije mjeri se pri $\lambda 5220$ Å (g_2 filtar), te na rubovima depresije pri $\lambda 5000$ Å (g_1 filtar) i $\lambda 5500$ Å (y filtar Strömgrenovog fotometrijskog sustava). Pojasevi filtara iznose 130 Å za g_1 i g_2, dok za Strömgrenov y filtar iznosi 230 Å. Kako bi se širokopojasno suženje na 5200 Å fotometrijski detektiralo, definira se sljedeći indeks:

$$a = g_2 - (g_1 + y)/2 \tag{1}$$

S obzirom da takva veličina vrlo slabo ovisi o temperaturi (raste prema nižim temperaturama), uvodi se "intrinzični indeks pekulijarnosti" koji je definiran kao

$$\Delta a = a - a_0\left[(b - y);\ (B - V);\ g_1 - y)\right], \tag{2}$$

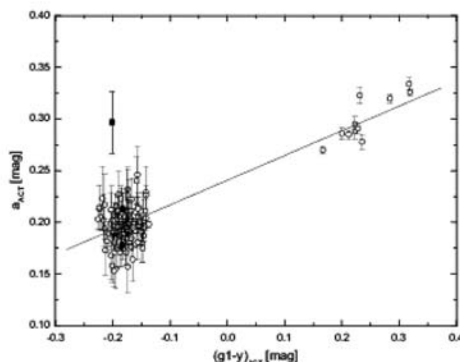
odnosno, kao razlika između pojedine a vrijednosti i vrijednosti indeksa zvijezde koja nije neobična, a iste je boje. Pravac na kojem se nalaze vrijednosti indeksa pekulijarnosti zvijezda koje nisu kemijski neobične, a iste su boje, naziva se pravac normiranosti.



Slika 1. "Sirova" CCD snimka, te CCD snimka nakon primjene fotometrijske redukcije.

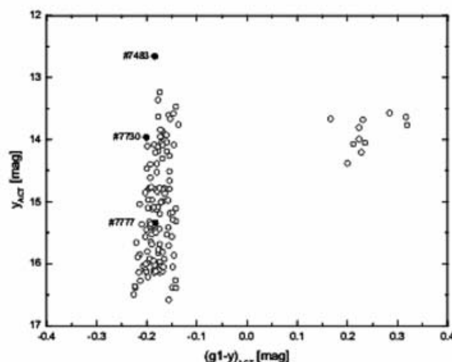
CCD-snimke sadrže brojne primjese i defekte koji nisu rezultat samog izvora koji se opaža. Stoga proces kalibriranja CCD snimaka uključuje otklanjanje bias-a, darka-a i flat-a od izvorno snimljene slike. Sama kalibracija započinje sa 'sirovim' snimkama bias-a, dark-a, flat-a, te sirovim snimkama neba. Važno je napomenuti da je bias ona količina naboja koju dodajemo CCD-senzoru kako bi aktivirao sposobnost prihvata fotona. To je adicioni defekt snimke CCD-a. Dark predstavlja tamnu struju koja se isto tako dodaje signalu CCD-a kao pozadina. Dark je također adicioni defekt koji se mora odstraniti od izvorno snimljene snimke. Flat je, za razliku od bias-a i dark-a, multiplikativni defekt snimke CCD-a. Ovim se postupkom otklanjaju nejednolikosti u osjetljivosti samog čipa kamere. Opažanje kemijski neobičnih zvijezda u otvorenim zvjezdanim skupovima s točno određenom starošću i udaljenošću od izuzetne je važnosti za razumijevanje porijekla jakog magnetskog polja kod takvih zvijezda. Nije još posve jasno zašto samo mali postotak zvijezda ima tako veliko magnetsko polje u odnosu na druge zvijezde istog tipa. Maitzenov Δa fotometrijski sustav upravo koristi glavno svojstvo kemijski neobičnih zvijezda, a to je depresija toka zračenja u području $\lambda 5200$ Å. Na uzorku od gotovo 140 zvijezda iz samog središta skupa provedeni su prilagodbeni postupci za određivanje PSF (od *engl.* point-spread-function) funkcije i fotometrijska analiza. Zvijezda #7730 u nomenklaturi Sunga i dr. (1999.) je jedina zvijezda našeg uzorka za koju je pronađena značajna pozitivna Δa vrijednost. Zatim

za "blue straggler" zvijezdu #7483 je utvrđeno da je vjerojatno promjenjiva na dugim vremenskim periodima. Zvijezda #7777, koju su Paunzen i dr. (2003.) izdvojili kao λ-Bootis zvijezdu, potvrđena je u ovom istraživanju kao normalna zvijezda. Obzirom na raspoloživu instrumentaciju i tehnička ograničenja tijekom opažanja (ekspozicije ne duže od 60 s), te donju granicu Δa fotometrije od 12 mag, nisu bila moguća opažanja hladnijih pekulijarnih zvijezda. Ovdje su prikazani rezultati fotometrijskog istraživanja otvorenog zvjezdanog skupa NGC 6705 na udaljenosti od 2 kpc.



Slika 2. Opažani dijagram a prema $g_1 - y$ za NCG 6705.

Mjerenja su načinjena CCD-kamerom 1-m ACT-a (Austro-Croatian Teleskope) uz korištenje Δa fotometrijskog sustava. Tako se granica pouzdanih mjerenja nalazi pri 14.5 mag. Takva mjerna granica odgovara udaljenosti oko Sunca od 1 kpc, pa je u slučaju NGC 6705 (udaljenost 2 kpc) bilo moguće opažati jedino vruće pekulijarne zvijezde (Tamajo E. & Pavlovski K., 2006., ASP Conference Series, Vol. 349, 351–354).



Slika 3. HR-dijagram opažanih zvijezda otvorenog skupa NGC 6705.

Dakle, na većoj udaljenosti uzimajući u obzir utjecaj raznih postotaka metaliciteta ili galaktičkog magnetskog polja, razumno je težiti prema pomaku takve mjerne granice za barem dvije magnitude. S obzirom na položaj opažanog zvjezdanog skupa (projiciran je spram zvjezdanog oblaka Scutum), značajnije pogreške pri mjerenjima zvijezda slabijeg sjaja mogu se pripisati većoj međuzvjezdanoj zacrvenjenosti pozadinskih zvijezda. Vidimo da ovako prikazana uskopojasna fotometrija daje dobre rezultate u detekciji jakih magnetskih polja kod kemijski neobičnih zvijezda. Kako bi točnost takvog istraživanja bila što veća potrebna su dugačka vremena ekspozicije snimanja, pošto efekt pekulijarnosti tj. neobičnosti biva detektiran na skali milimagnituda sjajnosti.

ZABAVNA MATEMATIKA

Broj 2006

S novom godinom došli su i novi problemi. Jedan je upravo pred vama. Pogledajte pažljivo donje brojeve. U prvom retku su sve znamenke od 0 do 9 u obrnutom poretku, a ispod je broj 2006. Što treba učiniti? Treba između nekih brojeva gore staviti izvjestan broj znakova osnovnih računskih operacija tako da se kao rezultat dobije donji broj 2006.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

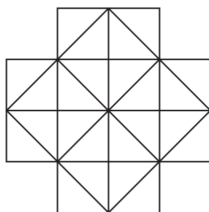
2006

Postoji rješenje sa samo šest znakova zbrajanja i množenja. Možda vama pođe za rukom da nađete rješenje s manjim brojem znakova.

Ugodna zabava!

Pravokutni trokuti

Imate li dobru moć zapažanja? Provjerite to na donjem crtežu. Na njemu je simetričan lik na kojemu se vide različiti geometrijski likovi.



Tako se na primjer može uočiti ukupno 22 kvadrata. Na crtežu je i mnogo pravokutnih trokuta. Koliko ih ukupno ima?

U muzeju

U tri velike dvorane likovnih umjetnosti nalazio se u jednom trenutku određeni broj posjetilaca. Najprije je $1/4$ posjetilaca iz prve dvorane prešla u drugu, zatim je $1/6$ novog broja posjetilaca iz druge dvorane prešla u treću i na kraju je $1/11$ novog broja posjetilaca iz treće dvorane prešla u prvu. Sada je u svakoj dvorani bilo po trideset posjetilaca.



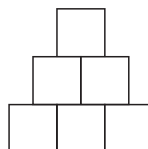
Koliko je u početku bilo posjetilaca u svakoj muzeskoj dvorani?

Možete li pronaći bar jedno od tih rješenja?

Mala piramida

Profesor Bistrić šutke je na ploči nacrtao donju piramidu, a onda je palo objašnjenje:

– Iz skupa prvih devet prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 izdvojite onih šest koji se mogu upisati u polja ove piramide tako da vodoravno dobijete tri broja koji su ujedno kvadrati neka druga tri broja. Ima više rješenja i treba dosta posla da bi se sva našla.

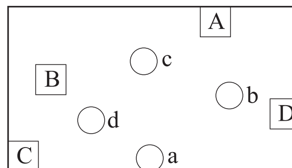


– Znamo mi to, znamo – čuo se glas iz zadnje klupe.

Eto posla i za vas.

Staze

Četiri susjeda na selu imaju kuće A, B, C, D i bunare a, b, c, d u velikom ograđenom prostoru.



Možeš li ucrtati staze od kuća do bunara tako da se nikoje dvije staze ne presijecaju?

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2006. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/225.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

2979.* Nađi sve proste brojeve p takve da je $8p^2+1$ također prost broj.

2980.* Dokaži da produkt osam uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti četvrta potencija nekog prirodnog broja.

2981. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_{\sin x}\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{\cos x}\sin x}}\leqslant\sqrt{2},$$

$x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

2982. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$$

2983.* Dijagonale jednakokračnog trapeza su okomite na njegove krakove. Kolika je njegova površina ako je duljina dijagonale 20 cm, a kraka 15 cm?

2984.* Točke P, Q, R, S su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ paralelograma $ABCD$. Odredi površinu četverokuta koji je ograničen pravcima AQ, BR, CS, DP ako je površina paralelograma jednaka P.

2985. Dana je kružnica k polumjera r sa središtem O i točke A i B izvan nje. Konstruiraj tetivu $\overline{PQ}$ od k tako da bude $B\in PQ$ i $\sphericalangle QAP=90^\circ$.

2986.* U trokutu ABC kut $\alpha=70^\circ$, a U je središte upisane mu kružnice. Ako je $|CA|+|AU|=|BC|$, odredi kut β.

2987. Dani su pravokutan trokut ABC $(\alpha=90^\circ)$ i točke $C'\in\overline{AB}$, $B'\in\overline{AC}$ tako da je $|BC'|=|CB'|$. Promatraj točke $F\in\overline{BB'}$ i $E\in\overline{CC'}$ za koje je $\frac{|C'E|}{|CE|}=\frac{|BF|}{|B'F|}$, te točku $D\in\overline{BC}$. Dokaži

$$AD\perp EF\iff\frac{|C'E|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|DC|}{|DB|}.$$

2988. Odredi skup svih kompleksnih brojeva

$$z=(4t+1)+(3t+7)i,\quad t\in\mathbf{R}$$

u kompleksnoj ravnini. Koji od njih ima najmanji modul?

2989. Za dani $n\in\mathbf{N}$ odredi $k\in\mathbf{N}$ takav da je broj

$$\binom{2n+k}{n}\binom{2n-k}{n}$$

maksimalan?

2990. Tanki štap prelomljen je na tri dijela. Kolika je vjerojatnost da se od njih može sastaviti trokut?

2991. Neka su a, b, p, q, r međusobno različiti brojevi i svaki je različit od nule. Odredi zbroj $x+y+z$ ako x, y, z zadovoljavaju uvjete

$$\begin{aligned}\frac{x}{p}+\frac{y}{p-a}+\frac{z}{p-b}&=1,\\ \frac{x}{q}+\frac{y}{q-a}+\frac{z}{q-b}&=1,\\ \frac{x}{r}+\frac{y}{r-a}+\frac{z}{r-b}&=1.\end{aligned}$$

2992. Odredi sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 242. Kruno i njegova mlađa sestra Katarina se njišu na ljuljačkama iste duljine. Ako se zanjišu s iste visine, podjednako snažno, tko će se duže njihati? Da li bi se duže njihali na dugačkoj ili kratkoj ljuljački? Odgovore provjerite pokusom pomoću kuglica obješenih na nit.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

OŠ – 243. Profesor Mudrić ulovio je veću ribu, pa je izmjerio njenu masu pomoću svog ribarskog štapa kao što to obično čini. Njegov ribarski štap ima masu 1 kg i težište mu je udaljeno 80 cm od debljeg kraja. Prof. Mudrić je objesio ribu na deblji kraj i postavio štap na ogradu pomičući ga lijevo-desno dok ga nije uravnotežio. Kolika je bila masa ribe ako je udaljenost od kraja na kojem je ona visjela do ograde bila 20 cm?

OŠ – 244. Akvarij je osvijetljen s 4 serijski spojene žarulje. Da li bi se smanjila potrošnja električne energije ako bi ga osvijetlili s tri umjesto četiri žarulje? Objasnite odgovor.

OŠ – 245. Koliko je puta brzina vrha velike kazaljke veća od brzine vrha male kazaljke na ručnom satu? Duljina velike kazaljke je 6 cm, a male 4 cm.

1329. Neko tijelo izbacimo vertikalno uvis početnom brzinom $6\,\mathrm{m/s}$. Na tijelo prilikom gibanja djeluje sila otpora zraka čiji je iznos 20% od iznosa sile teže. Odredite maksimalnu visinu do koje će tijelo doći i vrijeme koje će mu za to trebati.

1330. Ljestve se oslanjaju na zid bez trenja, a između njih i tla faktor trenja je μ. Koji je najmanji kut između ljestvi i tla, pri kojem one neće iskliznuti?

1331. Posuda s vodom stoji na vagi baždarenoj u njutnima. Vaga pokazuje težinu od 10 N. U posudu potpuno uronimo željezni uteg, mase 1 kg i gustoće $7800\,\mathrm{kg/m^3}$, držeći ga cijelo vrijeme na niti, tako da ne dodiruje dno posude. Što će pokazivati vaga? Obrazložite odgovor!

1332. Dvije jednake kuglice mase m vise na svilenim nitima duljine L. Kuglice imaju istoimene naboje Q_1 i Q_2. Polumjer kuglica je malen u usporedbi s njihovom međusobnom udaljenošću, tako da se one mogu smatrati točkastim nabojima. Izvedite izraz za ravnotežnu udaljenost d između kuglica, uz pretpostavku da je njihov otklon od okomitog položaja malen, tako da vrijedi $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$.

1333. Debela staklena ploča, prekrivena je vrlo tankim slojem prozirne tvari indeksa loma $n = 1.5$. Okomito na ploču upada paralelan snop monokromatske svjetlosti valne duljine 600 nm. Kolika je najmanja debljina nanesenog sloja, ako na njegovoj površini dolazi do maksimalnog slabljenja svjetlosti, te ona izgleda tamna, premda je osvijetljena? Indeks loma prozirne tvari manji je od indeksa loma stakla od kojeg je načinjena ploča.

1334. Kad se izvor istosmjernog napona od 2 V spoji na "crnu kutiju", koja sadrži nepoznati električni element, struja u krugu iznosi 200 mA. Ako se izvor zamijeni izvorom izmjeničnog napona, frekvencije 50 Hz, struja postaje 100 mA. Kolika će biti struja pri istom naponu i frekvenciji od 1000 Hz?

1335. Dok se ljeti sunčate na plaži, na vaše tijelo stiže $800\,\mathrm{W/m^2}$ solarne energije. Uz pretpostavku da se apsorbira 40% te energije, te da je izložena površina tijela $0.5\,\mathrm{m^2}$, procijenite koliko vode treba znojenjem ishlapiti iz tijela za 1 sat sunčanja, da bi se utrošila apsorbirana energija. Latentna toplina isparavanja vode je $2.3\cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}$.

C) Rješenja iz matematike

2951. *Nađi sve proste brojeve p takve da je $2p+1$ potpuni kub.*

Rješenje. Kako je $2p+1 = n^3$ pri čemu je $n \in \mathbf{N}$, imamo $2p = n^3 - 1$. Odavde zaključujemo da je n neparan jer je $2p$ paran, pa je n^3-1 parno, a n^3 je neparan, što znači da je i n neparan.

Kako je $n^2+n+1 > 2$ neparan broj iz

$$2p = (n-1)(n^2+n+1)$$

slijedi $p > 2$, $2 = n-1$. Odavde je $n = 3$, $p = 13$.

Kako je $2p+1 = 27 = 3^3$, vidimo da je $p = 13$ jedno jedino rješenje.

Gabrijel Guberović (1), Gimnazija, Nova Gradiška

2952. *Pokaži da jednadžba*

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$$

nema cjelobrojno rješenje.

Rješenje. Zadana jednadžba, osim $x = y = z = 0$, nema cjelobrojnih rješenja.

Kada bi postojalo rješenje x, y, z pri čemu sva tri broja nisu jednaka 0, i da je njihova najveća zajednička mjera $m > 1$, tada bi zbog homogenosti jednadžbe također i $x_1 = \dfrac{x}{m}$,

$y_1 = \frac{y}{m}$, te $z_1 = \frac{z}{m}$ bilo cjelobrojno rješenje i najveća zajednička mjera od x_1, y_1 i z_1 bila bi 1. Zbog toga možemo pretpostaviti da je najveća zajednička mjera od x, y i z jednaka 1.

Kako je na desnoj strani jednadžbe paran broj, to i na lijevoj mora biti isto tako, pa je $x = 2x_1$. Uvrstimo to u jednadžbu te je podijelimo s 2, dobijemo

$$4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 6x_1yz.$$

Sada je $y = 2y_1$. Uvrstimo li to i podijelimo jednadžbu s 2, slijedi

$$2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 = 6x_1y_1z.$$

Napokon je $z = 2z_1$, no to znači da su sve tri nepoznanice djeljive s 2, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Marko Čolić (2), III. gimnazija, Osijek

2953. *a) Ako su a, b, c i d prirodni brojevi pokažite da vrijede jednakosti*

$$\begin{aligned}(a^2+163b^2)(c^2+163d^2) &= (ac-163bd)^2 + 163(bc+ad)^2\\ &= (ac+163bd)^2 + 163(bc-ad)^2,\end{aligned}$$

tj. da je skup $A = \{a^2 + 163b^2 \mid a, b \in \mathbf{N}\}$ zatvoren u odnosu na množenje.

b) Ako je $p = a^2 + 163b^2$ prost broj, dokaži da je par prirodnih brojeva (a, b) jednoznačno određen.

Rješenje.

a) $$\begin{aligned}(a^2+163b^2)(c^2+163d^2) &= (a+i\sqrt{163}b)(c+i\sqrt{163}d)\\ &\quad\cdot(a-i\sqrt{163}b)(c-i\sqrt{163}d)\\ &= [(ac-163bd)+i\sqrt{163}(bc+ad)]\\ &\quad\cdot[(ac-163bd)-i\sqrt{163}(bc+ad)]\\ &= (ac-163bd)^2+163(bc+ad)^2.\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i druga jednakost.

b) Neka je $p = a^2+163b^2 = c^2+163d^2$. Tada je

$$\begin{aligned}p(d^2-b^2) &= (a^2+163b^2)d^2-(c^2+163d^2)b^2\\ &= a^2d^2-b^2c^2,\end{aligned}$$

a kako je p prost broj, on dijeli $ad \pm bc$, tj. $p \leqslant |ad \pm bc|$. Odavde dobivamo da je

$$\begin{aligned}p^2 &= (a^2+163b^2)(c^2+163d^2)\\ &= (ac \pm 163bd)^2 + 163(ad \mp bc)^2\end{aligned}$$

djelitelj od $(ad \pm bc)^2$, radi čega je $(ad \pm bc) = 0$ (u protivnosti bi bilo $p^2 > (ad \pm bc)^2$). Stoga je

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2+163b^2}{c^2+163d^2} = 1,$$

odakle slijedi jedinstvenost para brojeva (a, b) za prosti broj p.

Ur.

2954. *Nađi sva pozitivna rješenja sistema jednadžbi*

$$\frac{x_2x_3x_4}{x_1} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{x_1x_3x_4}{x_2} = 4 \qquad (2)$$

$$\frac{x_1x_2x_4}{x_3} = 16 \qquad (3)$$

$$\frac{x_1x_2x_3}{x_4} = 36. \qquad (4)$$

Prvo rješenje. Ako pomnožimo jednadžbe (1) i (4), nakon skraćivanja dobivamo izraz $(x_2x_3)^2 = 36$, odnosno

$$x_2x_3 = 6. \qquad (5)$$

(Zbog uvijeta zadatka ne može biti negativno).

Nadalje, ako podijelimo jednadžbe (2) i (3) nakon sređivanja dobivamo:

$$\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \text{pa je} \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

Sada iz jednadžbi (5) i (6) slijedi

$$x_2 = 2\sqrt{3} \quad \text{i} \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Uvrstimo $x_2 = 2\sqrt{3}$ i $x_3 = \sqrt{3}$ u jednadžbu (3)

$$x_1x_4 = 8, \qquad (7)$$

odnosno u jednadžbu (1)

$$\frac{x_4}{x_1} = \frac{1}{x_2x_3}, \qquad \frac{x_4}{x_1} = \frac{1}{6}. \qquad (8)$$

Iz (7) i (8) slijedi $x_1 = 4\sqrt{3}$, $x_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Pozitivna rješenja sustava su

$$x_1 = 4\sqrt{3},\ x_2 = 2\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Goran Šeketa (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac

Drugo rješenje. Pomnožimo li sve jednadžbe

$$(x_1x_2x_3x_4)^2 = 1 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 36,$$

dobivamo

$$x_1x_2x_3x_4 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6, \quad \text{tj.}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = 48.$$

Sada redom slijedi

$$\frac{x_2x_3x_4}{x_1} = 1 / \cdot x_1^2, \quad x_1x_2x_3x_4 = x_1^2,$$

$$x_1^2 = 48, \quad x_1 = 4\sqrt{3};$$

$$\frac{x_1x_3x_4}{x_2} = 4 / \cdot x_2^2, \quad x_1x_2x_3x_4 = 4x_2^2,$$

$$4x_2^2 = 48, \quad x_2 = 2\sqrt{3};$$

$$\frac{x_1x_2x_4}{x_3} = 16 / \cdot x_3^2, \quad x_1x_2x_3x_4 = 16x_3^2,$$

$$16x_3^2 = 48, \quad x_3 = \sqrt{3};$$

$$\frac{x_1x_2x_3}{x_4} = 36 / \cdot x_4^2, \quad x_1x_2x_3x_4 = 36x_4^2,$$

$$36x_4^2 = 48, \quad x_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

Rješenje je

$$x_1 = 4\sqrt{3},\ x_2 = 2\sqrt{3},\ x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Gabrijel Guberović (1), Nova Gradiška

2955. *Nađi sva cjelobrojna rješenja* (a, b, c) *jednadžbe*

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \binom{c}{2}$$

takva da je $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$.

Rješenje. Jednadžbu napišemo u obliku

$$a^2 - a + b^2 - b = c^2 - c.$$

Stavljajući $c = a + m$, $c = b + n$ ona prelazi u

$$a^2 - a + b^2 - b = (a + m)^2 - (b + n) \quad \text{tj.}$$

$$b^2 = 2am + a + m^2 - n.$$

Iz $b = a + m - n$ dobivamo

$$a^2 - a(2n + 1) + n^2 - 2mn + n = 0.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je

$$D = (2n + 1)^2 - 4(n^2 - 2mn + n) = 8mn + 1,$$

što je neparan broj. Iz $8mn+1 = (2k-1)^2$, $k \in \mathbf{N}$ slijedi $mn = \dfrac{k(k-1)}{2}$ pa je rješenje kvadratne jednadžbe

$$a = \frac{1}{2}(2n + 1 + 2k - 1) = n + k.$$

(Drugo rješenje $a = n - k + 1$ ne zadovoljava).

Iz $b = a + m - n$ slijedi $b = m + k$ i $c = b + n = m + n + k$. Dakle, sva rješenja (a, b, c), $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ su dana s

$$a = n + k, \quad b = m + k, \quad c = m + n + k.$$

gdje je

$$mn = \frac{k(k-1)}{2}, \quad k \geqslant 2,\ n \leqslant m.$$

Na primjer, za $k = 2$, $n = 1$, $m = 1$ rješenje je $(3, 3, 4)$, za $k = 3$, $n = 1$, $m = 3$ je $(4, 6, 7)$, za $k = 4$ rješenja su $(5, 10, 11)$ i $(6, 7, 9)$ itd.

Ur.

2956. *Neka su* z_1, z_2, z_3, z_4 *kompleksni brojevi, takvi da je* $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ *i* $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. *Dokaži jednakost*

$$z_1^{3^n} + z_2^{3^n} + z_3^{3^n} + z_4^{3^n} = 0,$$

za svaki prirodan broj n.

Rješenje. Koristit ćemo identitet

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(abc + abd + acd + bcd)$$
$$= (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$- ab - ac - ad - bc - bd - cd).$$

Dokaz se provodi indukcijom po n. Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi po pretpostavci. Pretpostavimo da je za neki $k \geqslant 0$

$$z_1^{3^k} + z_2^{3^k} + z_3^{3^k} + z_4^{3^k} = 0. \qquad (1)$$

Koristeći gornji identitet dobivamo

$$z_1^{3^{k+1}} + z_2^{3^{k+1}} + z_3^{3^k+1} + z_4^{3^{k+1}} - 3\sum z_i^{3^k} z_j^{3^k} z_h^{3^k} = 0,$$

$(1 \leqslant i < j < h \leqslant 4)$. Iz

$$\sum z_i^{3^k} z_j^{3^k} z_h^{3^k} = (z_1z_2z_3z_4)^{3^k}\left(\frac{1}{z_1^{3^k}} + \frac{1}{z_2^{3^k}} + \frac{1}{z_3^{3^k}} + \frac{1}{z_4^{3^k}}\right)$$

$$= (z_1z_2z_3z_4)^{3^k}$$

$$\cdot \left(\frac{\overline{z_1^{3^k}}}{|z_1|^{2\cdot 3^k}} + \frac{\overline{z_2^{3^k}}}{|z_2|^{2\cdot 3^k}} + \frac{\overline{z_3^{3^k}}}{|z_3|^{2\cdot 3^k}} + \frac{\overline{z_4^{3^k}}}{|z_4|^{2\cdot 3^k}}\right)$$

$$= r^{-2\cdot 3^k}(z_1z_2z_3z_4)^{3^k}\left(\overline{z_1^{3^k} + z_2^{3^k} + z_3^{3^k} + z_4^{3^k}}\right)$$

gdje je $r = |z|$. Odavde iz (1) slijedi

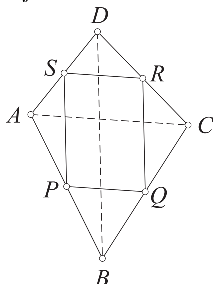
$$z_1^{3^{k+1}} + z_2^{3^{k+1}} + z_3^{3^k+1} + z_4^{3^{k+1}} = 0.$$

Prema tome tvrdnja vrijedi za svako $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Antonio Krnjak (3), Gimnazija "Čakovec", Čakovec

2957. *Točke P, Q, R, S su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ četverokuta $ABCD$. Pokaži da je $PQRS$ paralelogram.*

Prvo rješenje.

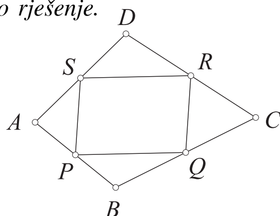


Četverokut $PQRS$ je paralelogram, jer su PQ i SR paralelni s dijagonalom AC četverokuta $ABCD$ (srednjica trokuta), te su PS i RQ paralelni s dijagonalom BD.

Napomena. Tvrdnja vrijedi i kada zadani četverokut nije konveksan.

Šimun Romić (2), Gimnazija "Metković", Metković

Drugo rješenje.



$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $PQRS$ paralelogram.

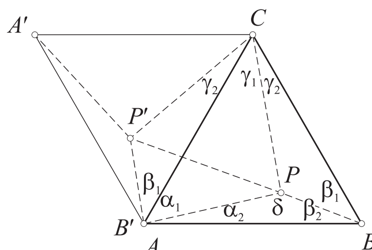
Marina Škaričić (4), Gimnazija Marka Marulića, Split

2958. *Unutar jednakostraničnog trokuta ABC dana je točka P za koju vrijedi*

$$|CP|^2 = |AP|^2 + |BP|^2.$$

Dokaži da je $\sphericalangle BPA = 150^\circ$.

Rješenje. Nacrtamo jednakostraničan trokut ABC, točku P unutar trokuta, dužine $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ i $\overline{CP}$ kao na slici. Napravimo preslik trokuta ABC tako da ga zarotiramo oko točke C. Na taj način smo dobili novi trokut $A'B'C$. Točka P preslikala se u točku P'. Dužina $\overline{CP}$ u $\overline{CP'}$, $\overline{BP}$ u $\overline{B'P'}$ i $\overline{AP}$ u $\overline{A'P'}$.



Pošto je $|CP| = |CP'|$ i kut $\sphericalangle P'CP = \sphericalangle ACB = 60^\circ$ lako je zaključiti da je trokut $CP'P$ jednakostraničan sa stranicom duljine $|CP|$.

Trokut APP' treba zadovoljiti jednadžbu (iz uvjeta zadatka, i jednakosti u jednakostraničnom trokutu $CP'P$)

$$|PP'|^2 = |AP|^2 + |AP'|^2.$$

Zbog toga je kut $\sphericalangle PAP' = \alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$. Pošto su $\alpha_2 = 60^\circ - \alpha_1$ i $\beta_2 = 60^\circ - \beta_1$ slijedi

$$\alpha_2 + \beta_2 = 60^\circ - \alpha_1 + 60^\circ - \beta_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

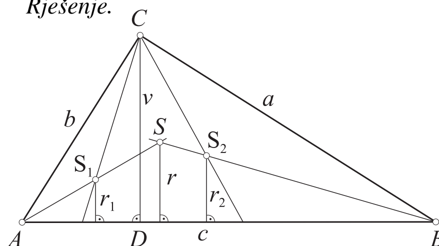
i konačno:

$$\delta = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta_2) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Goran Šeketa (2), Karlovac

2959. *Dan je pravokutan trokut ABC s visinom $\overline{CD}$ na hipotenuzu. Polumjere trokutima ABC, ACD i CBD upisanih kružnica označimo redom s r, r_1, r_2. Dokaži da je $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.*

Rješenje.



Kako su trokuti ABC, ACD i CBD slični, imamo:

$$\frac{r_1}{v}=\frac{r}{a} \quad \text{i} \quad \frac{r_2}{v}=\frac{r}{b}, \quad \text{tj.}$$
$$r_1=\frac{rv}{a} \quad \text{i} \quad r_2=\frac{rv}{b}.$$

Odavde je

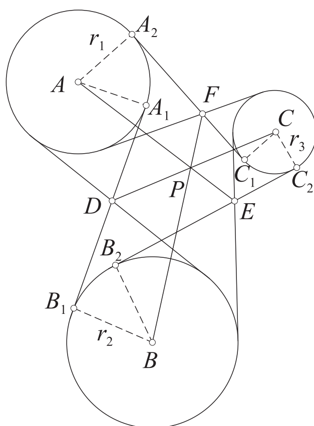
$$r_1^2+r_2^2=\frac{r^2v^2}{a^2}+\frac{r^2v^2}{b^2}=\frac{r^2v^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2}$$
$$=\frac{r^2v^2c^2}{a^2b^2}=r^2,$$

jer je $a^2+b^2=c^2$ i $vc=ab$.

Marina Škaričić (4), Split

2960. *Dane su tri kružnice koje se ne sijeku i nijedna nije sadržana u nekoj drugoj. Svako od tri središta kružnica spojeno je sa sjecištem unutarnjih tangenata drugih dviju. Dokaži da se te tri dužine sijeku u istoj točki.*

Rješenje.



Iz sličnosti trokuta ADA_1 i BDB_1, BEB_2 i ECC_2, CFC_1 i AFA_2 imamo

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{|BE|}{|EC|}=\frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{|CF|}{|FA|}=\frac{r_3}{r_1}.$$

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=1$$

Prema Cevijevom teoremu pravci AE, BF i CD se sijeku u istoj točki.

Ur.

2961. *Sve strane trostrane piramide su šiljastokutni trokuti sa stranicama duljina a, b i c.*

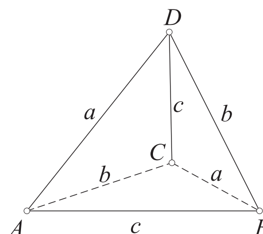
a) Dokaži da je volumen te piramide jednak

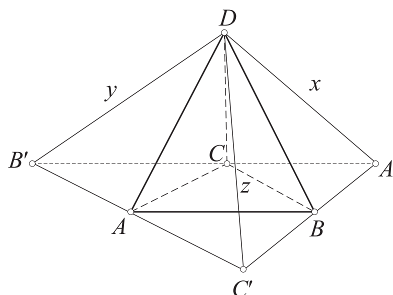
$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

b) Ako je h visina te piramide, dokaži jednakost

$$\frac{2}{h^2}=\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}.$$

Rješenje. a) Piramidu $ABCD$ kod koje je $|AD|=|BC|=a$, $|AC|=|BD|=b$ i $|AB|=|CD|=c$ uložimo u piramidu $A'B'C'D'$ tako da je $B'C'\|BC$, $C'A'\|CA$, $A'B'\|AB$. Prema uvjetu zadatka je $|AB'|=|AC'|=|AD|=a$, $|BC'|=|BA'|=|BD|=b$, $|CA'|=|CB'|=|CD|=c$.





$\overline{B'C'}$ je promjer kružnice k_1 u ravnini $B'C'D$ koja sadrži i vrh D. Zato je $\Delta B'C'D$ pravokutan. Analogno su $\Delta C'A'D$ i $\Delta A'B'D$ pravokutni. Neka je $|A'D|=x$, $|B'D|=y$, $|C'D|=z$. Tada je

$$x^2+y^2=4c^2, \quad y^2+z^2=4a^2, \quad z^2+x^2=4b^2.$$

Rješenje ovog sustava jednadžbi je

$$x=\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)},$$

$$y=\sqrt{2(c^2+a^2-b^2)},$$
$$z=\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)}.$$

Kako je kod piramide $A'B'C'D$, $A'D\perp B'D$ i $A'D\perp C'D$ možemo uzeti da je $\Delta B'C'D$ baza piramide, a njezina visina $\overline{A'D}$. Nadalje $DA'\perp DB'\perp DC'\perp DA'$, pa je volumen piramide $A'B'C'D$ jednak

$$V'=\frac{1}{3}\cdot B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}yz\cdot x=\frac{1}{6}xyz.$$

Ako je V volumen piramide $ABCD$, tada je $V=\frac{1}{4}V'$, pa je

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

b) Volumen V piramide $ABCD$ možemo prikazati kao

$$V=\frac{1}{3}h\cdot P(ABC)$$
$$=\frac{1}{3}h\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\text{tj.}$$
$$V=\frac{h}{12}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

Odavde slijedi

$$\frac{2}{h^2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

Sada još preostaje provjeriti

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2},$$

tj.

$$[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$$
$$=(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$
$$+(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)$$
$$+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2).$$

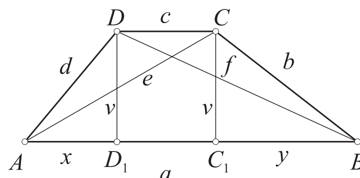
Ur.

2962. *Paralelne stranice trapeza ABCD su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Dokaži jednakost*

$$\frac{|AB|^2-|BC|^2+|AC|^2}{|CD|^2-|AD|^2+|AC|^2}=\frac{|AB|^2-|AD|^2+|BD|^2}{|CD|^2-|BC|^2+|BD|^2}=\frac{|AB|}{|CD|}.$$

Rješenje. Uvedimo oznake: $|AB|=a$, $|AC|=e$, $|BD|=f$, $|AD_1|=x$, $|C_1B|=y$. Sada treba dokazati

$$\frac{a^2-b^2+e^2}{c^2-d^2+e^2}=\frac{a^2-d^2+f^2}{c^2-b^2+f^2}=\frac{a}{c}.$$



Dokažimo prvo jednakost

$$\frac{a^2-b^2+e^2}{c^2-d^2+e^2}=\frac{a}{c}.$$

Sa slike je:

$$b^2=v^2+y^2,\quad d^2=v^2+x^2,\quad e^2=v^2+(a-y)^2,$$
$$f^2=v^2+(a-x)^2,\quad a-x=c+y,\quad a-y=c+x.$$

Imamo

$$\frac{a^2-v^2-y^2+(a-y)^2+v^2}{c^2-v^2-x^2+(c+x)^2+v^2}=\frac{2a(a-y)}{2c(c+x)}=\frac{a}{c}.$$

Sada dokažimo da je $\dfrac{a^2-d^2+f^2}{c^2-b^2+f^2}=\dfrac{a}{c}$:

$$\frac{a^2-v^2-x^2+(a-x)^2+v^2}{c^2-v^2-y^2+(c+y)^2+v^2}=\frac{2a(a-x)}{2c(c+y)}=\frac{a}{c}.$$

Marina Škaričić (4), Split

2963. *Dane su tri jednake kutije. U prvoj se nalazi a bijelih i b crnih, u drugoj c bijelih i d crnih, a u trećoj su sve kuglice bijele. Na slučajan način se bira kutija i iz nje izvlači kuglica. Kolika je vjerojatnost da izvučena kuglica bude bijela?*

Rješenje. Vjerojatnost da kuglica bude iz prve kutije je

$$P_1=\frac{1}{3},\qquad(1)$$

a da ta kuglica iz prve kutije bude bijela je

$$P_{1b}=\frac{1}{3}\frac{a}{a+b}.\qquad(2)$$

Za bijelu kuglicu iz druge kutije vjerojatnost je

$$P_{2b} = \frac{1}{3}\frac{c}{c+d}, \qquad (3)$$

i iz treće

$$P_{3b} = \frac{1}{3}. \qquad (4)$$

Prema tome, iz (2), (3) i (4), vjerojatnost da na slučajan način bude izabrana bijela kuglica je

$$P_b = P_{1b} + P_{2b} + P_{3b} = \frac{1}{3}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3}$$

$$P_b = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right).$$

Goran Šeketa (2), Karlovac

2964. *Na susretu mladih matematičara mnogi sudionici su se međusobno rukovali. Dokaži da je broj onih koji su se rukovali s neparnim brojem drugih, paran.*

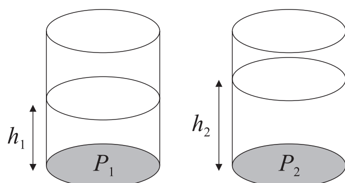
Rješenje. Zbrojimo li brojeve rukovanja svih pojedinih sudionika, dobit ćemo dvostruki broj svih rukovanja do kojih je uopće došlo, jer će svako rukovanje između A i B u sumu ući jednom kao rukovanje od A i jednom kao rukovanje od B. Prema tome, gornja je suma paran broj. Odatle zaključujemo da u njoj ima paran broj neparnih pribrojnika, jer bi u protivnom bilo neparan broj svih rukovanja.

Šimun Romić (2), Metković

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 234. *Branimir treba odrediti gustoću nepoznate tekućine. U posudu ulije vodu do visine 12 cm. Kad u istu posudu ulije istu masu nepoznate tekućine visina tekućine je 15.5 cm. Kolika je gustoća nepoznate tekućine?*

Rješenje.



$h_1 = 12\,\text{cm}$

$h_2 = 15.5\,\text{cm}$

$P_1 = P_2 = P$

$\rho(H_2O) = 1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$\rho_{\text{nep}} = ?$

$m_1 = \rho(H_2O)\cdot P\cdot h_1,$

$m_2 = \rho_{\text{nep}}\cdot P\cdot h_2,$

$m_1 = m_2,$

$\rho(H_2O)\cdot P\cdot h_1 = \rho_{\text{nep}}\cdot P\cdot h_2,$

$$\rho_{\text{nep}} = \frac{\rho(H_2O)\cdot h_1}{h_2} = \frac{1\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 12\,\text{cm}}{15.5\,\text{cm}},$$

$$\rho_{\text{nep}} = 774\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.774\,\frac{\text{g}}{\text{m}^3}.$$

Vanja Ubović (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje

OŠ – 235. *Profesor Mudrić pomaže prijatelju u gradnji kuće. Odlučili su kupiti crijep za krov kvadratnog oblika dimenzija 25 cm x 25 cm. Kod slaganja se prekrije 1/5 crijepa po dužini i po širini. Koliko komada crijepa je profesor Mudrić izračunao da treba kupiti ako je površina krova 150 m², a odlučili su kupiti 4% više za svaki slučaj da se neki crijepovi razbiju kod transporta?*

Rješenje.

$a = 25\,\text{cm} = 0.25\,\text{m}$

$b = 25\,\text{cm} = 0.25\,\text{m}$

$P_k = 150\,\text{m}^2$

$N = ?$

N – broj crijepova

N_u – ukupan broj crijepova

P_k – površina krova

P_c – površina crijepova nakon slaganja

$$P_c = \frac{4}{5}a \cdot \frac{4}{5}b = 0.2\,\mathrm{m} \cdot 0.2\,\mathrm{m},$$

$$P_c = 0.04\,\mathrm{m}^2,$$

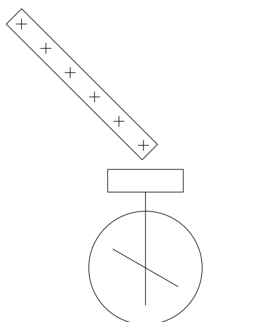
$$N = \frac{P_k}{P_c} = \frac{150\,\mathrm{m}^2}{0.04\,\mathrm{m}^2} = 3\,750\,\mathrm{kom},$$

$$N_u = N + \frac{4 \cdot N}{100} = 3\,750 + 150,$$

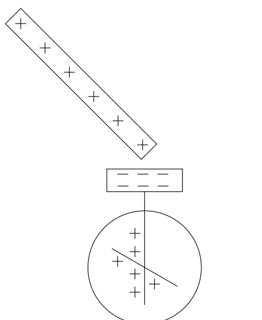
$$N_u = 3\,900\,\mathrm{kom}.$$

Vanja Ubović (8), Gornje Bazje

OŠ – 236. *Neutralnom elektroskopu primaknemo pozitivno nabijeni štap, ali ga ne dodirnemo. Nacrtaj kako će se raspodijeliti naboj na elektroskopu. (Elektroskop se sastoji od metalne pločice koja je spojena na metalni držač i kazaljku i sve je to preko plastičnog prstena umetnuto na kućište.)*

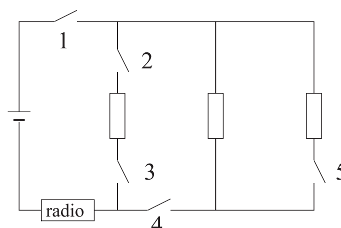


Rješenje. Naboj na pločici elektroskopa bit će negativan zbog influencije. Influencija je odbijanje suprotnih električnih naboja u neutralnom tijelu pod utjecajem nekog elektriziranog tijela.



Silvija Konjić (8),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 237. *Na slici je prikazan električni krug u koji su spojeni radio, kojeg je Hana napravila, otpora 40 Ω, pet prekidača, tri otpornika otpora 50 Ω i baterija od 4.5 V. Svi prekidači su otvoreni tako da struja ne može teći kroz njih. Koliko najmanje prekidača Hana treba zatvoriti da struja proteče kroz radio? Kolika će biti ta struja? Kako pomoću ampermetra Hana može izmjeriti tu struju?*



Rješenje.

$$U = 4.5\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 50\,\Omega$$
$$R_2 = 40\,\Omega$$

$$I = ?$$

Treba zatvoriti najmanje dva prekidača – 1 i 4.

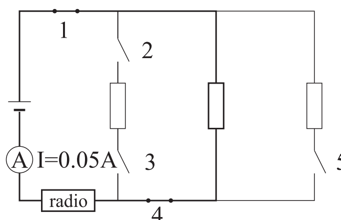
$$R = R_1 + R_2,$$

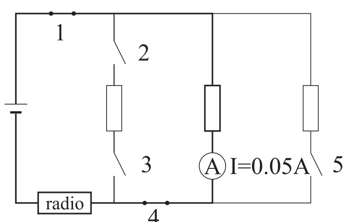
$$R = R_1 + R_2 = 50\,\Omega + 40\,\Omega = 90\,\Omega,$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4.5\,\mathrm{V}}{90\,\Omega} = 0.05\,\mathrm{A}.$$

Jakost struje kroz taj strujni krug će biti 0.05 A.

Ovaj spoj je serijski i struja je u njemu svugdje ista. Ampermetar moramo uključiti bilo gdje serijski u taj (zatvoreni) strujni krug.





Marija Čelar (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

1315. *Posuda mase 0.07 kg, napunjena je do vrha tekućinom gustoće 2 500 kg/m³ i obješena o oprugu koja se zbog opterećenja istegnula. Nakon toga posuda je skinuta s opruge i obješena je druga isto takva, koja je do* $\frac{3}{4}$ *svoje visine napunjena tekućinom gustoće 4 000 kg/m³. Istezanje opruge je u drugom slučaju za 10% veće nego u prvom. Odredite volumen posude.*

Rješenje. Na osnovu omjera istezanja i sile koje djeluju na oprugu vrijedi

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{m_0 + \frac{3\rho_2 V_0}{4}}{m_0 + \rho_1 V_0} = n,$$

gdje je m_0 masa prazne posude, a V_0 traženi volumen.

Omjer istezanja je $n = 1.1$, pa se dobije traženi volumen

$$V_0 = \frac{(n-1)m_0}{\frac{3\rho_2}{4} - n\rho_1} = 28\,\mathrm{cm}^3.$$

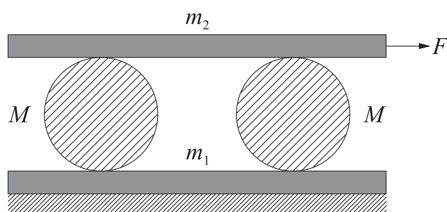
Marko Colić (2), III. gimnazija, Osijek

1316. *Vagon duljine 3.6 m giba se brzinom 15 m/s. Iz pravca okomitog na smjer gibanja vagona doleti puščano zrno i probija oba zida vagona. Mjesto na zidu vagona u koje je zrno prvo udarilo, od početka vagona udaljeno je 1 m. Koliko je od početka vagona udaljeno mjesto na suprotnom zidu kroz koje je prošlo zrno? Brzina metka je 600 m/s. Kako bi se trebao gibati vagon da ovo mjesto bude udaljeno od početka vagona 0.95 m?*

Rješenje. Za vrijeme t za koje je zrno gibajući se brzinom $v_2 = 600$ m/s prešlo put $a = 3.6$ m, vagon je krećući se brzinom $v_1 = 15$ m/s, prešao put s. Na osnovi ovog slijedi da su rupe koje je napravilo zrno pomaknute za $s = \frac{av_1}{v_2} = 0.09$ m, odnosno da je rupa na suprotnom zidu udaljena od početka vagona 1.09 metara. Da bi ova rupa bila udaljena od početka vagona 95 centimetara očigledno je da se vagon treba gibati u suprotnom smjeru, a brzina se može izračunati iz izraza $v_1' = \frac{v_2 s'}{a}$, gdje je $s' = 0.05$ m. Tražena brzina je, prema tome, $v_1' = 8.33$ m/s.

Barbara Štimac (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1317. *Na glatkoj horizontalnoj podlozi nalazi se daska mase* m_1 *i dva ista valjka mase* M *i polumjera* R*, a preko njih je položena druga daska mase* m_2*. U početnom trenutku sistem je postavljen simetrično i miruje. Na gornju dasku počne djelovati sila* F *u horizontalnom smjeru. Odredite ubrzanja dasaka ako se valjci gibaju bez proklizavanja.*



Rješenje. Jednadžba translacijskog gibanja donje daske je

$$m_1 a_1 = 2F_2.$$

Jednadžba za rotaciju valjka je

$$I\alpha = (F_1 + F_2)R,$$

a za translaciju

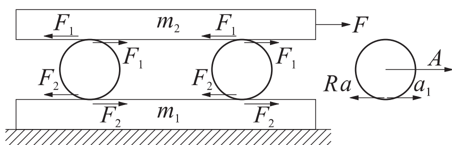
$$MA = F_1 - F_2.$$

Moment inercije valjka je

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

Jednadžba gibanja gornje daske je

$$m_2 a_2 = F - 2F_1.$$



Kako je ubrzanje dodirne točke valjka i donje daske a_1 i cilindar ne proklizava po njoj to je

$$A - Ra = a_1.$$

Ubrzanje gornje daske je

$$a^2 = A + Ra.$$

Rješavanjem gornjih jednadžbi slijedi

$$a_1 = -\frac{FM}{4m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2) + 2M^2}$$

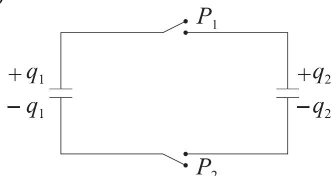
i

$$a_2 = \frac{F(3M + 4m_1)}{4m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2) + 2M^2}.$$

Vidimo da se donja daska giba u suprotnom smjeru od pretpostavljenog.

Ur.

1318. *Na pločama dva ravna pločasta kondenzatora, kapaciteta C_1 i C_2, nalaze se naboji q_1 i q_2. Pokažite da će se ukupna elektrostatička energija sistema smanjiti ako paralelno spojimo kondenzatore istovremenim zatvaranjem prekidača P_1 i P_2. Gdje se gubi energija? Nađite uvjet pri kojem nema gubitka energije.*



Rješenje. Prije zatvaranja prekidača ukupna elektrostatska energija sistema je

$$E_e = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Nakon zatvaranja prekidača uspostavlja se novo ravnotežno stanje, s novim nabojima q_1' i q_2' na kondenzatorima. Pošto su naponi na kondenzatorima jednaki, vrijedi

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2},$$

a iz zakona održanja naboja dobijemo

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'.$$

Rješavanjem ovog sistema jednadžbi dobije se

$$q_1' = \frac{C_1(q_1 + q_2)}{C_1 + C_2} \quad \text{i}$$

$$q_2' = \frac{C_2(q_1 + q_2)}{2(C_1 + C_2)}.$$

Elektrostatička energija sistema kondenzatora je sada

$$E_e' = \frac{q_1'^2}{2C_1} + \frac{q_2'^2}{2C_2} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Ako izračunamo razliku energija $E_e - E_e'$, nakon sređivanja dobije se

$$E_e - E_e' = \frac{(q_1C_2 - q_2C_1)^2}{2C_1C_2(C_1 + C_2)}.$$

Odavde se vidi da zaista vrijedi $E_e \geqslant E_e'$. Gubici energije potječu od rada uloženog na premještanje naboja s jednog na drugi kondenzator prilikom uspostavljanja novog ravnotežnog stanja. Gubitaka nema ukoliko vrijedi $q_1C_2 = q_2C_1$. Tada je $q_1' = q_1$ i $q_2' = q_2$, pa nema premještanja naboja, a samim tim ni gubitaka energije.

Ur.

1319. *Vodljivi okvir u obliku kvadrata stranice 15 cm nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije 0.8 T okomitom na ravninu okvira. Zatim se okvir, ostajući u istoj ravnini prepravi u oblik pravokutnika s omjerom stranica 1 : 2. Naći naboj koji protekne kroz okvir pri ovoj promjeni oblika. Otpor okvira iznosi 2 Ω.*

Rješenje. Naboj koji proteče kroz okvir iznosi

$$q = I\Delta t = \frac{|\varepsilon_1|\Delta t}{R} = \frac{|\Delta\phi|}{R},$$

gdje je $\Delta\phi$ promjena magnetskog toka kroz površinu ograničenu okvirom, tj. $\Delta\phi = B\Delta S$. Količina proteklog naboja ovisi od veličine promjene efektivne površine i iznosi:

$$q = \frac{|\Delta\phi|}{R} = \frac{B\Delta S}{R} = \frac{B}{R\left|\left[\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{4a}{3}\right) - a^2\right]\right|}$$

$$= \frac{Ba^2}{9R} = 1\,\text{mC}.$$

Ur.

1320. *Snop elektrona koji se kreće brzinom 106 m/s pada na nenabijenu izoliranu metalnu kuglu polumjera 5 cm. Koliki je najveći broj elektrona koji se može skupiti na kugli?*

Rješenje. Kinetička energija elektrona u snopu iznosi $E_k = \frac{1}{2}m_e v^2$. Potencijal nabijene kugle na površini iznosi $\varphi = \frac{kq}{r}$. Nabijanje kugle traje sve dok se ne izjednače kinetička energija elektrona u snopu s njegovom potencijalnom energijom u blizini površine kugle. Tada elektron više ne može savladati potencijalnu razliku i dolazi do raspršenja elektrona na kugli. Dakle vrijedi

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = kq_e\frac{q}{r} = \frac{kNq_e^2}{r}$$

pa je $N = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_e r v^2}{kq_e^2} \approx 10^8$ elektrona.

Ur.

1321. *Horizontalno postavljena daska harmonijski titra u horizontalnom pravcu s amplitudom 1 cm. Odredite koeficijent trenja μ između daske i tijela koje stoji na njoj, ako tijelo počne kliziti po dasci tek kada se period titranja smanji na 1 s.*

Rješenje. Prije proklizavanja, u neinercijalnom sistemu vezanom za dasku, na tijelo djeluje inercijalna sila F_i i sila statičkog trenja F_t. Ove sile po iznosu su jednake, ali suprotnih smjerova. Tijelo će početi proklizavati kada sila statičkog trenja postane veća od dinamičke sile trenja, $F_t > \mu mg$, gdje je s m označena masa tijela. Kako je $F_t = F_i = ma(t)$, gdje je $a(t) = \omega^2 x(t)$ ubrzanje daske, ω frekvencija titranja, a $x(t)$ položaj centra mase daske u trenutku t, vidimo da statička sila trenja ima maksimalnu vrijednost u vršnim položajima daske. Tada je $F_{t,max} = m\omega^2 x_0$. U graničnom slučaju je $F_{t,max} = \mu mg$, odakle je $m\omega^2 x_0 = \mu mg$, tj. $\mu = \frac{\omega^2 x_0}{g} = \frac{4\pi \cdot 2x_0}{gT^2} \approx 0.4$.

Ur.

Rješenja zabavne matematike

Popunjavanje tablice

Svaki treći broj je isti. Vidi tablicu!

5	3	9	5	3	9	5
8	8	1	8	8	1	8
4	6	7	4	6	7	4
5	3	9	5	3	9	5

Oranje

Da nije bilo kvara, seljak bi drugu polovicu njive uzorao do 10 sati. Pošto je nakon kvara radio dva puta sporije, on je do 10 sati završio polovicu ostatka posla, odnosno četvrtinu njive. Preostalu četvrtinu orao je od 10 do 12 sati i to po 5 ari na sat. To znači da je četvrtina njive 10 ari, a cijela njiva 40 ari. Seljak je počeo orati u 6 sati. Prvu polovicu njive orao je 2 sata, a drugu 4 sata.

U znaku broja 4

Tražena četiri rješenja su $1\,343\,784 : 949 = 1\,416$, $1\,337\,174 : 943 = 1\,418$, $1\,202\,464 : 848 = 1\,418$, $1\,200\,474 : 846 = 1\,419$.

Na satu geometrije

U kvadrat 7×7 može se smjestiti 12 "brodova" oblika pravokutnika 1×4 bez zajedničkih polja. Zato je potrebno najmanje 12 "hitaca" za pogodak. No, taj broj je i dovoljan. Vidi crtež.

	×				×	
		×				×
			×			
×				×		
	×				×	
		×				×
			×			

Jednakost

$97 - 53 \cdot 1 = 86 - 42 + 0.$

Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica” 2005.



U Hrvatskoj je po sedmi put 17. ožujka 2005. godine održano međunarodno matematičko natjecanje “**Klokan bez granica**”.

Ove godine natjecanje se proširilo na **205** osnovnih i **104** srednjih škola u svim županijama. Sudjelovalo je **5 584** učenika IV. i V. razreda osnovne škole (**E**), **4 709** učenika VI. i VII. razreda osnovne škole (**B**), **3 390** učenika VIII. razreda osnovne i I. razreda srednje škole (**C**), **2 112** učenika II. i III. razreda srednje škole (**J**) i **675** učenika IV. razreda srednje škole (**S**). Ukupno je sudjelovalo **16 470** učenika.

Bodovni prag je bio: za C (Cadete) 70.00; za J (Juniore) 60.00; J (Juniore) – matematički program 84.5; a za S (Studente) 65; S (Studente) – matematički program 86.25 bodova.

Pri dolasku na natjecanje svaki je učenik dobio mali poklon, a 10% najbolje plasiranih učenika primilo je i nagrade.

Dragi učenici nadamo se da su vas navedeni podaci iznenadili, te da ste i vi poželjeli sudjelovati u tom natjecanju. Nudimo vam niz zadataka s rješenjima, kako bi provjerili vaše mogućnosti i znanje. Ako ste zainteresirani za natjecanje “Klokan bez granica” javite se svojim nastavnicima do kraja prvog polugodišta, a oni će dalje kontaktirati s nama.

Koordinator matematičkog natjecanja Neda Lukač, prof.

Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Juniori)

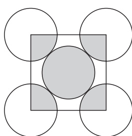
1. Hana živi s ocem, majkom, bratom, jednim psom, dvije mačke, tri papige i šest riba. Koliko noga imaju svi skupa?
A. 13 **B.** 22 **C.** 24 **D.** 26 **E.** 32

2. Sanja ima peti najbolji rezultat, a ujedno i pedeseti najgori rezultat na zadnjem Klokan natjecanju u školi. Koliko je učenika sudjelovalo na natjecanju?
A. 54 **B.** 75 **C.** 99 **D.** 100 **E.** 101

3. 18 učenika prelaze cestu u parovima. Parovi su označeni brojevima od 1 do 9. U paru koji je označen s parnim brojem nalaze se dječak i djevojčica, a u paru koji je označen neparnim brojem nalaze se dva dječaka. Koliko dječaka prelazi cestu?
A. 10 **B.** 12 **C.** 14 **D.** 11 **E.** 18

4. Ivan napuše 8 balona svake tri minute. Koliko će napuhati balona nakon dva sata ako svaki deseti balon pukne čim se napuše?
A. 160 **B.** 216 **C.** 240 **D.** 288 **E.** 320

5. Na crtežu se nalazi 5 krugova koji su sa istim polumjerom te se dodiruju. Kvadrat dodiruje središta četiri vanjska kruga. Omjer zatamnjenog dijela i nezatamnjenog dijela pet krugova iznosi

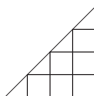


A. 1:3 **B.** 1:4 **C.** 2:5 **D.** 2:3 **E.** 5:4

6. Tvornica je dobila narudžbu izraditi pravokutne blokove veličine $10\,\text{cm} \times 12\,\text{cm} \times 14\,\text{cm}$, ali nesmotrenošću su izradili blokove veličine $12\,\text{cm} \times 14\,\text{cm} \times 16\,\text{cm}$. Koliki je postotak povećanja obujma napravljenih blokova s obzirom na naručene blokove?

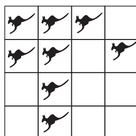
A. 20 **B.** 30 **C.** 40 **D.** 50 **E.** 60

7. Na slici se nalazi sedam kvadrata. Koliko se više trokuta nego kvadrata nalazi na slici?



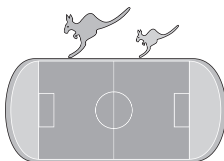
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** jednak ih je broj

8. Osam klokana nalazi se u 8 polja kvadratne tabele koja ima 16 polja (vidi sliku). Klokan iz svog polja može skočiti na bilo koje prazno polje. Odredi najmanji broj skokova klokana tako da na kraju imamo točno 2 klokana u svakom retku i svakom stupcu.



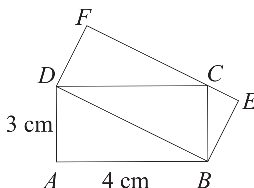
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

9. Mama Klokanica i njezino mladunče Jumpy skaču oko stadiona opsega 330 m. Oboje skaču po jedan skok u sekundi, no duljina majčinog skoka je 5 m, a Jumpyjevog 2 m. Oboje su počeli skakati u istoj točki i u istom smjeru. Nakon 25 sekundi Jumpy se umorio i stao, dok je Klokanica nastavila. Nakon koliko sekundi će majka Klokanica prvi put prestići Jumpyja?



A. 15 s **B.** 24 s **C.** 51 s **D.** 66 s **E.** 76 s

10. Na slici su prikazana dva pravokutnika: $ABCD$ i $DBEF$. Kolika je površina pravokutnika $DBEF$?



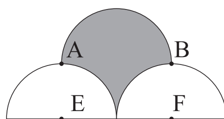
A. $10\,\text{cm}^2$ **B.** $12\,\text{cm}^2$ **C.** $13\,\text{cm}^2$ **D.** $14\,\text{cm}^2$ **E.** $16\,\text{cm}^2$

11. Ako se prazna tablica popuni tako da je u svakom redu razlika između dva broja ista, u svakom stupcu također razlika između dva broja ista, a isto tako i na dijagonalama, koji broj se nalazi u kvadratu koji je označen s x? (Razlike ne moraju biti iste.)

				21
	16			
		27		
				x

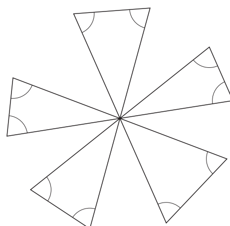
A. 49 **B.** 42 **C.** 33 **D.** 28 **E.** 4

12. Slika pokazuje 3 dijela kruga, s točkama A i B točno iznad središta E i F donja dva polukruga. Ako je polumjer svakog od donja dva polukruga 2 cm, tada je površina zatamnjenog dijela u cm^2:



A. 2π **B.** 7 **C.** $2\pi + 1$ **D.** 8 **E.** $2\pi + 2$

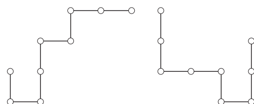
13. Koji je zbroj 10 označenih kutova na slici?



A. $300°$ **B.** $450°$ **C.** $360°$ **D.** $600°$ **E.** $720°$

14. Aritmetička sredina 16 različitih prirodnih brojeva je 16. Koja je najveća moguća vrijednost koju može poprimiti prirodni broj iz tog skupa?
A. 16 **B.** 24 **C.** 32 **D.** 136 **E.** 256

15. Svaki od dva komada žice napravljen je od 8 segmenata dužine 1. Jedan komad je stavljen iznad drugog i oni se djelomično poklapaju. Koja je najveća moguća dužina njihova zajedničkog dijela?

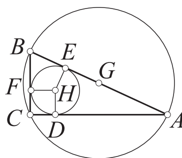


A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 7

16. U torbi se nalazi 17 loptica numeriranih od 1 do 17. Ako nasumično izaberemo nekoliko loptica, koji je najmanji broj loptica potreban da bi bili sigurni da je među izvučenim lopticama barem jedan par čiji je zbroj 18?
A. 7 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 11 **E.** 17

17. Dvije boce jednakog obujma napunjene su smjesom vode i soka. Omjeri količina vode i soka su $2:1$, odnosno $4:1$. Prelijemo li sadržaj obiju boca u jednu veliku, omjer vode i soka u novoj bit će:
A. 3:1 **B.** 6:1 **C.** 11:4 **D.** 5:1 **E.** 8:1

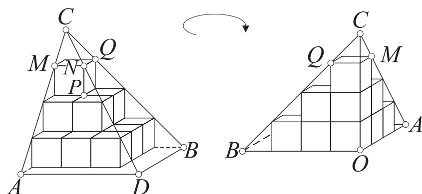
18. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta upisanog u kružnicu dijametra D. Promjer kružnice upisane u trokut označimo s d. Koliko je $d+D$?



A. $a+b$ **B.** $2(a+b)$ **C.** $\frac{1}{2}(a+b)$ **D.** $\sqrt{ab}$ **E.** $\sqrt{a^2+b^2}$

19. Auto se vozio stalnom brzinom od 90 km/h. Kada je sat u autu pokazivao 21.00 dnevna kilometraža je iznosila 115.0, točnije: da je do tog trenutka prijeđeno 115.0 km. Kasnije te večeri mjerač kilometara je pokazivao isti niz znamenki kao i sat. U koje vrijeme se to dogodilo?
A. 21.30 **B.** 21.50 **C.** 22.00 **D.** 22.10 **E.** 22.30

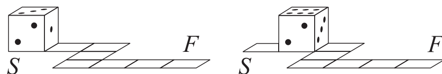
20. 14 jediničnih kocaka su stavljane u kut i okružene piramidom. Koliki je obujam piramide?



A. $\frac{64}{3}$ **B.** 64 **C.** $\frac{(64\sqrt{2})}{3}$ **D.** $\frac{(64\sqrt{2})}{2}$ **E.** $\frac{32}{3}$

21. Svaki drugi dan Kristijan govori istinu, inače laže. Danas je rekao točno 4 sljedeće rečenice. Koju nije danas mogao izreći?
A. Imam prost broj prijatelja. **B.** Imam jednak broj muških kao i ženskih prijatelja.
C. Zovem se Kristijan. **D.** Uvijek govorim istinu.
E. 3 moja prijatelja su starija od mene.

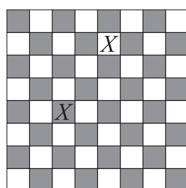
22. Na igraćoj kocki zbroj točkica na nasuprotnim stranama uvijek je jednak 7. Igraću kocku zakrećemo od položaja S do položaja F pri čemu su prva dva položaja prikazana na slici. Koji će se broj pojaviti na gornjoj strani kocke u položaju F?



A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

23. Koliko pozitivnih cijelih brojeva n zadovoljava nejednadžbu
$2\,000 < \sqrt{n(n+1)} < 2005$
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

24. Koliko postoji načina da se izabere bijeli i crni kvadrat s 8×8 šahovske ploče tako da ti kvadrati ne leže u istom redu i stupcu?



A. 56 **B.** 5040 **C.** 720 **D.** 672 **E.** 768

Rezultati

1.	A	5.	D	9.	C	13.	E	17.	C	21.	C
2.	A	6.	E	10.	B	14.	D	18.	A	22.	E
3.	C	7.	C	11.	B	15.	D	19.	D	23.	E
4.	D	8.	B	12.	D	16.	C	20.	A	24.	E

Zadaci za 4. razred srednjih šskola

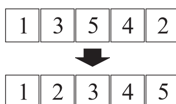
1. Za koju vrijednost broja x je vrijednost razlomka $\frac{x^2}{x^3}$ najmanja?

A. 2 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -2 **E.** -3

2. Koliko je brojeva između 2 i 100 jednako kubu nekog prirodnog broja?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

3. Pet karata numeriranih brojevima 1, 2, 3, 4 i 5 poslagano je u poredak 1, 3, 5, 4, 2 (slika). Koliki je najmanji broj zamjena potrebno učiniti da se dobije poredak 1, 2, 3, 4, 5?

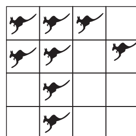


A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

4. Ako je $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2 \cdot n)^2$, koliki je prirodni broj n?

A. 8 **B.** 11 **C.** 22 **D.** 111 **E.** 444

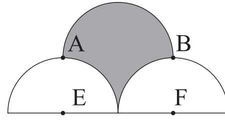
5. Osam klokana nalazi se u 8 polja kvadratne tabele koja ima 16 polja (vidi sliku). Klokan iz svog polja može skočiti na bilo koje prazno polje. Odredi najmanji broj skokova klokana tako da na kraju imamo točno 2 klokana u svakom retku i svakom stupcu.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

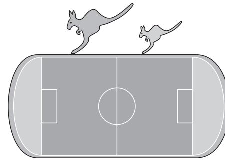
6. Zbroj četiri uzastopna prirodna broja ne može biti jednak
A. 2002 **B.** 22 **C.** 202 **D.** 222 **E.** 220

7. Slika pokazuje 3 dijela kruga s točkama A i B točno iznad središta E i F donja dva polukruga. Ako je polumjer svakog od donja dva polukruga 2 cm, tada je površina zatamnjenog dijela u cm^2:



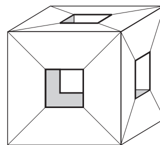
A. 2π **B.** 7 **C.** $2\pi + 1$ **D.** 8 **E.** $2\pi + 2$

8. Mama Klokanica i njezino mladunče Jumpy skaču oko stadiona opsega 330 m. Oboje skaču po jedan skok u sekundi, no duljina majčinog skoka je 5 m, a Jumpyjevog je 2 m. Oboje su počeli skakati u istoj točki i u istom smjeru. Nakon 25 sekundi Jumpy se umorio i stao, dok je Klokanica nastavila. Nakon koliko sekundi će majka Klokanica prvi put prestići Jumpyja?



A. 15 s **B.** 24 s **C.** 40 s **D.** 51 s **E.** 66 s

9. Kocka dimenzija $3 \times 3 \times 3$ ima masu 810 grama. Ako se kroz kocku probuše 3 rupe oblika kvadra dimenzija $1 \times 1 \times 3$ takve da se središte kocke podudara sa središtem baze kvadra (vidi sliku), tada preostali dio kocke ima masu



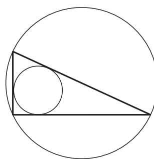
A. 540 g **B.** 570 g **C.** 600 g **D.** 630 g **E.** 660 g

10. Ako je f funkcija koja zadovoljava jednadžbu $f(x+1) = 2f(x) - 2002$ za svaki prirodni broj x i ako je $f(2005) = 2008$, koliko je $f(2004)$?
A. 2004 **B.** 2005 **C.** 2008 **D.** 2010 **E.** 2016

11. Ana boja nekoliko drvenih kocaka tako da svaku stranu kocke oboja ili crnom ili bijelom bojom upotrijebivši obje boje za svaku kocku. Koliko različito obojanih kocaka može napraviti?
A. 8 **B.** 16 **C.** 32 **D.** 52 **E.** 64

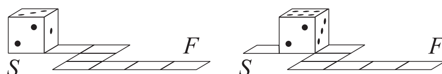
12. U kutiji se nalazi ukupno 60 crvenih, plavih i bijelih žetona. Ako bi se svi crveni žetoni zamijenili plavim, tada bi u kutiji bilo dvostruko više plavih nego bijelih žetona. Ali ako bi se svi bijeli žetoni zamijenili s plavim žetonima, tada bi plavih bilo tri puta više od crvenih. Koliki je broj plavih žetona u kutiji?
A. 10 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 25 **E.** 30

13. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta upisanog u kružnicu dijametra D. Promjer kružnice upisane u trokut označimo s d. Koliko je $d + D$?



A. $a + b$ **B.** $2(a + b)$ **C.** $\frac{1}{2}(a + b)$ **D.** $\sqrt{ab}$ **E.** $\sqrt{a^2 + b^2}$

14. Na igraćoj kocki zbroj točkica na nasuprotnim stranama uvijek je jednak 7. Igraću kocku zakrećemo od položaja S do položaja F pri čemu su prva dva položaja prikazana na slici. Koji će se broj pojaviti na gornjoj strani kocke u položaju F?

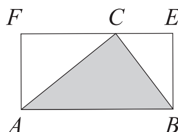


A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6.

15. Dvije boce jednakog obujma napunjene su smjesom vode i kiseline. Omjeri količina vode i kiseline su $2:1$, odnosno $4:1$. Prelijemo li sadržaj obiju boca u jednu veliku bocu, omjer vode i kiseline u novoj boci bit će:
A. $3:1$ **B.** $6:1$ **C.** $11:4$ **D.** $5:1$ **E.** $8:1$

16. Tijekom jednog dana Marko govori ili samo istinu ili laže cijeli taj dan. Danas je Marko izrekao četiri od ponuđenih pet rečenica: A. Broj mojih prijatelja je prost broj. B. Imam jednak broj prijatelja i prijateljica. C. 288 je djeljiv s 12. D. Uvijek govorim istinu. E. Tri moja prijatelja su stariji od mene. Koju od tih pet rečenica Marko nije izrekao danas?
A. A **B.** B **C.** C **D.** D **E.** E

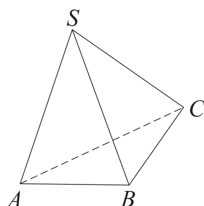
17. Na slici je prikazan pravokutnik $ABEF$ i trokut ABC. Kutovi ACF i CBE su jednaki. Uz to je $|FC| = 6$, $|CE| = 2$. Kolika je površina trokuta ABC?



A. 12 **B.** 16 **C.** $8\sqrt{2}$ **D.** $8\sqrt{3}$ **E.** neki drugi broj

18. Koji se od navedenih brojeva može prikazati kao produkt četiri različita prirodna broja veća od 1?
A. 625 **B.** 124 **C.** 108 **D.** 2187 **E.** 2025

19. U trostranoj piramidi $SABC$ bridovi SA, SB i SC su međusobno okomiti. Površine trokuta SAB, SAC i SBC su redom 3, 4 i 6. Koliki je volumen piramide $SABC$?



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8 **E.** 12

20. Ako je $\log\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=n$, kolika je vrijednost izraza $\log\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)$?

A. $n-1$ **B.** $1-n$ **C.** $\frac{1}{n}$ **D.** $n+1$ **E.** ne može se odrediti

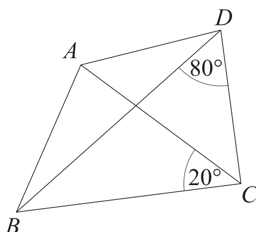
21. Neka je M skup svih realnih brojeva za koje vrijedi nejednakost $2^{4^x} < 4^{2^x}$. Kojem od navedenih skupova je jednak skup M?

A. $(-\infty, 1)$ **B.** $(0, 1)$ **C.** $(-\infty, 1) \cup (1, \infty,)$ **D.** $(0, \infty)$ **E.** $\mathbf{R}$

22. Odaberi neki broj, uvećaj ga dva puta i oduzmi mu jedan. Potom ponovi ovaj postupak još 97 puta počinjući uvijek s prethodno dobivenim rezultatom. Nakon tih 98 koraka dobio si broj $2^{100}+1$. S kojim je brojem započet postupak?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** nijednim od navedenih

23. U četverokutu $ABCD$ dijagonala BD simetrala je kuta ABC i $|AC| = |BC|$. Ako je kut $BDC = 80°$, a kut $ACB = 20°$, koliki je kut BAD?



A. 90° **B.** 100° **C.** 110° **D.** 120° **E.** 135°

24. Damir želi otputovati iz mjesta A u mjesto B. Kad bi putovao brzinom koja je za 5 km/h veća od planirane brzine stigao bi 5 sati ranije od predviđenog vremena, a kad bi putovao 10 km/h brže od planirane brzine stigao bi 8 sati ranije. Kolika je planirana brzina?

A. 10 km/h **B.** 15 km/h **C.** 20 km/h **D.** 25 km/h **E.** nemoguće ju je odrediti

Rezultati

1.	C	5.	B	9.	C	13.	A	17.	D	21.	A
2.	C	6.	E	10.	B	14.	E	18.	E	22.	E
3.	B	7.	D	11.	A	15.	C	19.	A	23.	D
4.	D	8.	D	12.	D	16.	C	20.	B	24.	B

Posjet Tjednu fizike 2005.

Marija Perkov[1], *Šibenik*

U povodu Tjedna fizike 2005. (7. – 12. studenog), Hrvatsko fizikalno društvo organiziralo je za nas Dane otvorenih vrata, održane od 10. do 12. studenog, te nam omogućilo da posjetimo i razgledamo Odsjek za fiziku i geofiziku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Institut za fiziku i Institut "Ruđer Bošković". Tako su i naši profesori fizike, prof. Paić i prof. Labor, u subotu 12. studenog organizirali put u Zagreb za sve zainteresirane učenike Gimnazije Antuna Vrančića u Šibeniku.

Polazak je dogovoren za subotu, u pet sati ujutro kod nadvožnjaka iznad naše škole, gdje su prije polaska počeli pristizati učenici-putnici, njih 35. Napokon, u autobusu su svi zauzeli svoja mjesta i autobus je krenuo. Atmosfera je bila odlična. Dok se autobus polako probijao kroz gustu maglu, većina učenika je spavala i tako nadoknađivala propušten san, dok je nekolicina "ubijala" vrijeme igrajući karte i pričajući. Nakon poprilično dugog puta po autocesti, pred vratima Zagreba smo s našim profesorima utvrdili raspored. Razgledavanje je dogovoreno za 10 – 13 h, nakon čega nam je dozvoljen samostalan obilazak grada do 15.30 h, kada smo se svi trebali naći na zagrebačkom Glavnom kolodvoru (željezničkom, da ne bude zabune). Oni koji nisu željeli u grad sa svojim profesorima mogli su posjetiti Interliber, sajam knjiga na Zagrebačkom velesajmu.

Po ulasku u Zagreb, uputili smo se prema Horvatovcu, malenom brežuljku na kojem su smještene navedene institucije. Obilazak je započeo uvodnim predavanjem "Magneti – što bi još trebalo znati o njima", na kojemu smo upoznati sa svim svojstvima magneta i nekim neobičnim svojstvima, kao što je levitacija ili spajanje strujnog kruga pomoću magneta. Poslije uvodnog predavanja bili smo podijeljeni u grupe (crvena, zelena, plava i bijela) i zajedno s voditeljem krenuli u razgledavanje laboratorija na Institutu za fiziku, gdje smo mogli vidjeti suhu DNA molekulu (svježe izvađenu iz hladnjaka), dodirnuti tekući dušik (za one koji ne znaju, temperatura tekućeg dušika iznosi i do -200 °C ali, kao što vidite, naše ruke nisu zamrznute, jer se dušik kondenzira prije no dođe na naš dlan, tj. ispari, i sve što ostaje jesu sitne, hladne kapljice vode). Na Fizičkom odsjeku PMF-a mogli smo vidjeti supravodljivu zavojnicu (uređaj koji je, kako smo doznali, našu državu stajao oko milijun kuna, a među ostalim služi za različita medicinska istraživanja, npr. za opširnije istraživanje magnetske rezonancije, koja se uspješno koristi u medicini – mogućnost skeniranja tijela uz pomoć magneta), doživjeti pokuse na sitnim predmetima, koji služe kao maketni prikazi stvarnosti (npr. na principu "levitacije" radi i jedan vlak u Japanu ili princip na kojem "radi" magnetsko polje Zemlje), te još mnogo toga. S Odsjeka za fiziku uputili smo se na Odsjek za geofiziku, gdje nas je jedan od profesora, uz pomoć demonstratora, upoznao s pojmovima poput "kuhanja" bure ili "pravljenja" tsunamija. Pa smo i mi "skuhali" jednu buru, tako da smo ubacivali suhi led u vrelu vodu te dobili neku vrstu pare koja je izgledala poput magle, ali se kretala poput vjetra, a demonstratori su nam pomoću plastičnih barijera dočarali Velebit i Maslenički most. Zatim smo zaranjavajući najobičniji balon na napuhavanje izazvali pojavu tsunamija, tako što je jedan od demonstratora umočio balon u akvarij pun vode i pod vodom ga probušio, što je rezultiralo da se voda uzburkala. Tako

[1] Priredila učenica 2.c razreda Gimnazije Antuna Vrančića u Šibeniku.

izazvan mali tsunami potopio je patkice koje su bile naslagane na zamišljenu obalu. Nakon tog iskustva upoznati smo s potresima i njihovim mjerenjima. Na Odsjeku za geofiziku na pod je postavljen jedan seizmološki uređaj, koji je mjerio aktivnost naših koraka. Ako bismo mirno stajali, seizmograf bi na papiru pokazivao ravnu crtu, a ako bismo poskakivali ili skakali, pokazao bi pravi potres. Također smo, na predavanju koje je uslijedilo, saznali i nešto više o Andriji Mohorovičiću. Doznali smo da, osim Mohorovičićevih ploča diskontinuiteta, na Mjesecu postoji i krater nazvan njegovim imenom, kao i novootkrivene ploče diskontinuiteta na Marsu. Zbog nedostatka vremena nismo uspjeli posjetiti memorijalnu sobu Andrije Mohorovičića. I napokon, na kraju smo na Institutu za fiziku doznali ponešto i o nastajanju svima dragih stvarčica poput CD-a i DVD-a. Nitko od nas do tada nije znao da se ta znanost zove nanostruktura tankih filmova. A tu su, naposljetku, i laseri i plazma (laserom smo gađali kemijsku olovku) te laserski inducirana fluorescencija (svjetlost se pri prolasku kroz plin ili tekućinu apsorbira na određenim bojama, valnim duljinama, koje su specifične za tu tvar; na tom principu radi i Teslina svjetiljka, za koju smo se svi složili da bi je bilo dobro imati u vlastitoj sobi na stolu).



Učenici (s lijeva na desno) Mirko Čorić i Filip Torić (prirodoslovno-matematička gimnazija) i Nikola Vranjić (opća gimnazija) u Laboratoriju za vremenski razlučivu lasersku spektroskopiju na Institutu za fiziku s velikom pažnjom prate što se dešava u plazmenoj lampi, kojom se demonstriraju karakteristike hladne plazme.

Ovo, naravno, nisu svi laboratoriji koje smo posjetili, niti svi pokusi koje smo vidjeli, a ja sam izabrala meni najzanimljivije. Nakon posjeta Institutima, neki su se uputili prema gradu, a neki prema Velesajmu, i svi smo se izvrsno proveli. Pri povratku kući, unatoč gustoj magli i umoru, u autobusu je vladala odlična atmosfera. Uz pjesmu i prepričavanje doživljaja proteklog dana, kao i "tračanje" pokojeg profesora, umorni smo se vratili u svoj Šibenik. I na kraju, mislim da stvarno moramo odati priznanje organizatorima, a i svim profesorima, vodičima i demonstratorima, jer su nam svijet fizike dočarali na najzanimljiviji mogući način, tako da se svi veselimo ponovnoj posjeti Zagrebu, i to ne samo zbog fizike, nego i zbog zajednički provedena vremena i druženja! Hvala profesorima što su nas odlučili povesti sa sobom! Bilo je fantastično!



Da li je otkriven deseti planet?

Matko Milin[1], *Zagreb*

Posljednjih nekoliko godina astronomsku su zajednicu više puta potresla otkrića velikih objekata unutar Sunčevog sustava, a na udaljenostima većim od udaljenosti najdaljeg prihvaćenog planeta, Plutona. Tako je prije par godina otkrivena Sedna, zatim nekoliko njoj sličnih planetoida, da bi taj niz ove godine kulminirao otkrićem još neimenovanog objekta označenog kao "2003 UB_{313}". Svim ovim planetoidima zajedničko je to da su veći od prije poznatih dalekih planetoida, s masama usporedivim s Plutonom. A i otkriće Sedne i nedavno otkriće objekta "2003 UB_{313}" potaknulo je rasprave o definiciji planeta i izazvalo dosta kontroverznih reakcija diljem svijeta. Što je tako posebno kod objekta 2003 UB_{313}? Pa prvenstveno veličina; naime, masa mu je procijenjena na veću od Plutonove, a polumjer na oko 2700 km (vrijednost koja je 20% veća od Plutonovog polumjera). Stoga se nameće pitanje trebamo li taj objekt proglasiti novim, "desetim" planetom. Međunarodno astronomsko udruženje (*International Astronomical Union*, IAU) ubrzo nakon otkrića izdalo je priopćenje da se objektu neće davati ime dok za to zaduženi odbori unutar udruženja ne odluče kako će ga klasificirati. Do sada se objekt ponekad nazivao Ksena i Lila, no nijedno od ta dva imena nije opće (a ni službeno) prihvaćeno...

Bez obzira na kontroverze oko klasifikacije, "2003 UB_{313}" vrlo je zanimljiv i po mnogo čemu poseban objekt Sunčevog sustava. Otkrili su ga M. Brown, C. Trujillo i D. Rabinowitz sa zvjezdarnice Mount Palomar (California) u siječnju 2005., koristeći snimke neba napravljene u listopadu 2003. godine. Lociran je na dvostruko većoj udaljenosti od Sunca do Plutona i trenutačno se nalazi blizu točke svoje putanje na kojoj je njegova udaljenost od Sunca najveća: 97 AU (AU je tzv. astronomska jedinica, definirana kao udaljenost Zemlje od Sunca). Prividna zvjezdana veličina mu je $m = 19$ što je premalo za detekciju većinom amaterskih teleskopa. Putanja mu je vrlo ekscentrična (tj. jako odstupa od kružnice), tako da se približava Suncu na svega 35 AU, što pak znači da će ponekad Suncu biti bliži od Plutona! Period revolucije oko Sunca jednak mu je 557 godina. Različito od prvih 7 planeta čije putanje leže manje-više u ravnini, putanja "2003 UB_{313}" vrlo je nagnuta na tu ravninu (oko 44°) i to je razlog zašto taj objekt nije bio otkriven prije (velika većina potraga vršena je oko ravnine ekliptike). Dosadašnja opažanja potvrdila su prisustvo zaleđenog metana na njegovoj površini (kao što je slučaj s Plutonom, a nije s drugim nedavno otkrivenim planetoidima). Nedugo nakon objave otkrića "2003 UB_{313}", teleskopom Keck na Havajima otkriveno je i postojanje najmanje jednog njegovog satelita. Taj mjesec je otprilike 60 puta manjeg sjaja od samog planetoida i procjenjuje se da je otprilike 8 puta manji; orbitalni period mu je procijenjen na 2 tjedna.

Otkriće "2003 UB_{313}" potaknulo je još intenzivniju potragu za novim sličnim objektima. Vrlo je vjerojatno da ih unutar Kuiperovog pojasa (područja Sunčevog sustava između 30 i 50 AU od Sunca) ima vrlo mnogo. Očekuje se, stoga, da će konačna odluka Međunarodnog astronomskog udruženja biti ta da se novootkriveni planetoidi klasificiraju ne kao planeti, već jednostavno kao TNO-objekti (od Trans-Neptunian Objects). Pluton, koji im je po mnogo čemu sličan i vrlo različit od ostalih planeta, zadržao bi "status planeta" isključivo iz povijesnih razloga...

---

[1] Autor je znanstveni suradnik u Laboratoriju za nuklearne reakcije Instituta Ruđer Bošković, mmilin@lnr.irb.hr



Dubravko Klabučar, Kvantni start: oprezni Planck i radikalni Einstein, EXP EDIT, Šibenik, 2005.



Kvantni start: oprezni Planck i radikalni Einstein – prva knjiga biblioteke *Boškoviana* iz područja teorijske fizike doprinos je Dubravka Klabučara, redovitog profesora Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, popularizaciji znanosti u Svjetskoj godini fizike. Knjiga je posvećena uspomeni na velikane znanosti Maxa Plancka i Alberta Eisteina, čija su otkrića dala pečat cijelom dvadesetom stoljeću i temelj su napretka modernih tehnologija.

Knjiga je podijeljena na šest poglavlja: *Povijesni pregled kao uvod*; *Zračenje crnog tijela*; *Fotonska hipoteza* i *fotoelektrični efekt*; *Comptonov efekt – konačan dokaz fotona*; Planckov *kratki životopis* i *Einsteinov kratki životpois*, prema temama odabranim iz gradiva kolegija studenata fizike nastavnog smjera Zagrebačkog Sveučilišta "Kvantna fizika i struktura materije". Stoga je knjiga prvenstveno namijenjena srednjoškolskim nastavnicima kao pomoć u dodatnom radu s naprednim učenicima kao i za produbljivanje njihovog znanja. Teme u knjizi su obrađene na podesan način i za nadarene učenike završnih razreda srednjih škola jer se matematički najzahtjevniji dijelovi svode na sumu geometrijskog reda, derivaciju logaritma i integral eksponencijalne funkcije koji se mogu preuzeti kao gotovi rezultati što neće znatno smanjiti razumijevanje ostalih dijelova knjige. Knjiga ima i jednu posebnost: to je umjetnička oprema s grafikama velikog hrvatskog slikara Miroslava Šuteja koja potiče na razmišljanje o uvjetovanosti i neospornoj povezanosti umjetnosti i znanosti, duhovnosti i materijalnosti, kako ističe njen urednik Matko Babić u svojem predgovoru. Knjiga se može nabaviti direktno od autora na `klabucar@phy.hr`.

Velimir Labinac, Riješeni zadaci iz elektrostatike i magnetostatike, Filozofski fakultet, Rijeka, 2003.



Riješeni zadaci iz elektrostatike i magnetostatike, autora Velimira Labinca, stručnog suradnika Odsjeka za fiziku, Filozofskog fakulteta u Rijeci je prva zbirka riješenih zadataka iz jedinstvene knjige "Classical Electrodynamics" J. D. Jacksona, ne samo kod nas nego i šire. Zbirka obuhvaća 88 detaljno riješenih problema iz područja elektrostatike i magnetostatike koji se nalaze u prvih pet poglavlja knjige. Pored riječi urednika, predgovora, kratkog sadržaja i pregleda problema po poglavljima, zbirka sadrži zadatke grupirane u pet poglavlja: *Uvod u elektrostatiku*; *Rubni problemi u elektrostatici: I*; *Rubni problemi u elektrostatici: II*; *Multipoli, elektrostatika u makroskopskim sredstvima, dielektrici*; *Magnetostatika*; kao i više priloga korisnih kod rješavanja pojedinih problema. To su: *Jedinice Gaussova CGS i SI sustava; Pretvorba jednadžbi elektrodinamike iz Gaussova CGS sustava u SI sustav jedinica; Važnije jednakosti iz vektorske analize; Literatura*; te *Kazalo pojmova*. Pojedini zadaci riješeni su upotrebom metode bilo razvoja u redove po malom parametru, razvoja po specijalnim funkcijama kao npr. Besselovim, sfernim funkcijama bilo Fourierovim razvojem. Dio problema riješen je korištenjem diferencijalnih jednadžbi s više varijabli, te pomoću Greenovih funkcija, a razvijena je i metoda vektorskog diferencijalnog računa. Metodom postupnog rješavanja autor je uspio olakšati pristup pojedinim problemima i ukazati na mogućnost korištenja raznih metoda da bi se došlo do rješenja što ima nadasve i veliku edukativnu vrijednost. Zbirka je prvenstveno namijenjena studentima fizike ali i drugim zainteresiranim za učenje kvantne elektrodinamike kao baze za mnoge tehnološke primjene. Knjigu se može naručiti direktno od autora na `labinac@ri.t-com.hr`.

Ana Smontara, Zagreb

BRIDŽ

Kako izgleda bridž partija? Koje probleme mora rješavati izvođač? Broj različitih situacija praktički je neograničen i svaka je partija jedinstvena – više se nikad neće ponoviti isto dijeljenje. Ipak, odigravanje se temelji na logičkoj analizi pri čemu trebamo uočiti temeljne principe koji se ponavljaju, uz različite varijacije i moguće izuzetke, pri različitim dijeljenjima.

Analizirajmo jedno dijeljenje.

Kontrakt je 3NT. To znači da se izvođač (koji se nalazi na poziciji **S**) obvezao napraviti 9 štihova u igri u kojoj nema aduta.

	N	
	♠ J 6 2 ♡ A ♢ Q J 4 3 ♣ K Q 9 8 7	
ataka: ♡ 6	W E	
	S ♠ A 10 7 4 ♡ K J 3 ♢ A 2 ♣ J 10 6 5	

Protivnik na poziciji **W** odigrao je prvu kartu (ataku) ♡6. Nakon toga, partner otvarača (na poziciji **N**) polaže svoje karte na stol. On dalje ne sudjeluje u igri, izvođač upravlja igrom karata na stolu i onih u svojoj ruci.

Izvođač radi plan. On ima samo 4 sigurna štiha: dva u hercu, jedan u karonu i jedan u piku. Zato mora razviti još pet štihova. Šanse za to su u trefu, gdje može osvojiti 4 štiha (nakon što jedan štih s asom dobiju protivnici), te u karonu gdje može dobiti još barem jedan štih – tu će možda jedan štih osvojiti protivnički kralj.

Naravno, obrana nastoji u to vrijeme osvojiti pet štihova kako bi srušila kontrakt. Pri tom računa na duljinu u herc boji koju ima **W**, i radi čega je atakirao tu boju.

Situacija u hercu je interesantna. Za izvođača je nepovoljno da drugi put herc odigra igrač na poziciji **E**, jer tad od dečka herc nema koristi: ako izvođač igra ♡K, dečka će nakon toga uzeti dama, a ako izvođač odigra ♡J tada neće uzeti štih. Zato je od najveće važnosti da prvi protivnik koji osvoji štih ne bude **E**.

Izvođač će radi toga u drugom štihu odigrati ♢Q.

Pogledajmo sva četiri lista radi lakšeg praćenja igre. Imajte pri tom u vidu da svaki igrač vidi u stvarnosti svoje karte, te one izložene na stolu.

	N	
	♠ J 6 2 ♡ A ♢ Q J 4 3 ♣ K Q 9 8 7	
W ♠ K 8 5 ♡ Q 10 7 6 2 ♢ K 10 9 5 ♣ 4		E ♠ Q 9 3 ♡ 9 8 5 4 ♢ 8 7 6 ♣ A 3 2
	S ♠ A 10 7 4 ♡ K J 3 ♢ A 2 ♣ J 10 6 5	

Ako je ♢K kod **E**-a, izvođač će napraviti dva karo štiha, jer taj kralj ne može osvojiti štih. U toj situaciji, ako dama osvoji štih, ili **E** stavi ♢K, izvođač će u nastavku osvojiti dodatni karo štih i može u trećem štihu odigrati tref s ciljem da razvije ključna četiri tref štiha.

U situaciji za stolom, **W** je uzeo drugi štih s ♢K, ali on ne može iz svoje pozicije odigrati herc. Time bi poklonio štih izvođaču, koji bi uzeo štih s dečkom. Najbolje što on može učiniti jest da odigra mali pik. Izvođač će staviti mali pik sa stola i kad **E** odigra damu, uzeti asom. Nakon toga će igrati tref i što god protivnici budu pokušali u nastavku, sigurno će doći do svojih 9 štihova.

Uvjerite se u to. Razmotrite što će biti ako **E** nakon što uzme štih s ♣A odigra herc, a što ako on odigra pik. Koja je igra za obranu bolja?

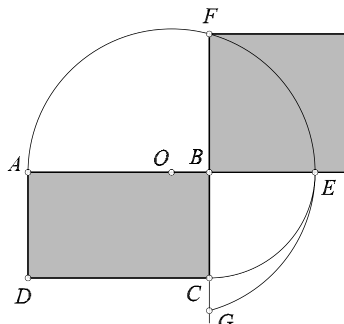
Proučite što bi se dogodilo da je izvođač (neoprezno) u drugom štihu odigrao tref, boju u koju polaže najviše šanse. Tada bi **E** uzeo štih asom i odigrao herc. Uočite da izvođac nakon toga nikako ne bi mogao ostvariti svoj kontrakt.

Ovaj je primjer uzet iz knjige *Bridge – Techniques and Tips from the Masters – 4279 Diagrammed Hands and Plays* (edited by Glorya Hale and Nancy Starr) u kojoj se na 630 stranica objašnjavaju temeljni pojmovi licitacije i odigravanja.

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 172

Rješenje.
Konstrukcija: Produžimo stranicu $\underline{AB}$ pravokutnika do točke E tako da je $|BE| = |BC|$ (vidi sliku).



Simetrala dužine $\underline{AE}$ (pokažite da se ona može konstruirati samo pomoću ravnala i šestara), siječe je u polovištu O. Opišimo kružnicu sa središtem u O polumjera $\underline{OA}$. Produžimo dužinu $\underline{CB}$ do sjecišta F s kružnicom. Tada je $\underline{BF}$ stranica traženog kvadrata.

Dokaz: Neka je G drugi presjek pravca BC i kružnice AFE. Tada je

$$|AB| \cdot |BE| = |BF| \cdot |BG|,$$

(potencija točke u odnosu na kružnicu). Kako je $|BF| = |BG|$, a prema konstrukciji $|BE| = |BC|$. Slijedi,

$$|AB| \cdot |BC| = |BF|^2,$$

čime je dokaz završen.

Knjigom su nagrađeni sljedeći učenici:

1. *Nikolina Artić* (2), Srednja škola "Krapina", Krapina; 2. *Igor Boban* (2), III. gimnazija, Split; 3. *Antonio Krnjak* (3), Gimnazija "Čakovec", Čakovec; 4. *Melkior Ornik* (2), XV. gimnazija, Zagreb; 5. *Mate Puljiz* (3), III. gimnazija, Split; 6. *Šimun Romić* (2), Gimnazija "Metković", Metković. 7. *Goran Šeketa* (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac. 8. *Filip Torić* (4), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik.

Riješili zadatke iz br. 1/121

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Mehmed Brkić*, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2951, 2952, 2954, 2957; *Marko Čolić* (2), III. gimnazija, Osijek, 2952, 2956, 2957, 2959; *Gabrijel Guberović* (1), Gimnazija "Nova Gradiška", Nova Gradiška, 2951, 2952, 2957, 2959, 2964; *Marko Hajba* (3), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 2954; *Antonio Krnjak* (3), Gimnazija "Čakovec", Čakovec, 2951, 2952, 2954, 2956–2959, 2964; *Šimun Romić* (2), Gimnazija "Metković", Metković, 2954, 2957, 2962–2964; *Goran Šeketa* (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac, 2951, 2954, 2957, 2958, 2963, 2964; *Marina Škaričić* (4), IV. gimnazija Marka Marulića, Split, 2951, 2953, 2957, 2959, 2962;

b) Iz fizike: *Marija Čelar* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 234, 237; *Andrej Grašić* (1), Gimnazija Frana Galovića, Koprivnica, 234; *Silvija Konjić* (8), OŠ Augusta Cesarića, Krapina, 234–236; *Vanja Ubović* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje, 234, 235, 237; *Jadran Berbić* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1315; *Marko Čolić* (2), III. gimnazija, Osijek, 1315; *Marko Hajba* (3), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1315; *Barbara Šimac* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1315, 1316.

Nagradni natječaj br. 174

Prikaži broj $\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}$ u obliku izraza koji sadrži samo zbrajanje, množenje i drugi korjen.

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2005./2006. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/III, 10001 Zagreb,
tel./fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Slika na naslovnici je prikaz Teslinog visokofrekventnog visokonaponskog oscilatora za pobuđivanje elektriciteta iz Colorado Springsa, SAD (1899).

Dragi čitatelji!

Ova 2006. godina je posvećena Nikoli Tesli, znamenitom izumitelju na području elektrotehnike s kraja 19. i početka 20. stoljeća. Kratak prikaz njegovog izrazito plodonosnog rada priredio je akademik Vladimir Paar. Svakodnevno slušamo meteorološke izvještaje i prognoze vremena za naredne dane. Za olujna vremena često smo svjedoci munja, koje mogu prouzročiti velike štete. U atmosferi postoje velike količine elektriciteta što je odavno zaokupljalo pažnju znanstvenika. O tome nas upoznaju Božena Volarić i Eugen Vujić s Geofizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Prošla godina je bila posvećena 100-godišnjici objavljivanja znanstvenih radova Alberta Einsteina. Tim povodom Branko Hanžek, asistent na Zavodu za povijest i filozofiju znanosti Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti, u svom članku iznosi primjere podrške i protivljenja znanstvenika s naših prostora Einsteinovoj teoriji relativnosti.

Također, ove se godine obilježava 100. obljetnica rođenja poznatog hrvatskog matematičara Vilima Fellera, koji je objavio preko stotinjak radova i knjiga iz analize, geometrije, teorije mjerenja, funkcionalne analize i diferencijalnih jednadžbi. O njemu piše profesor u mirovini, Neven Bogdanić iz Splita, navodeći opsežan pregled poznatih hrvatskih matematičara od 16. stoljeća do današnjih dana. Profesor Bernardin Ibrahimpašić iz Bihaća opisuje problem faktorizacije prirodnih brojeva, što je važno za primjenu u sigurnosti nekih kriptosustava. Je li Arhimedov zakon poluge aksiom ili se on može dokazati, saznajte iz priloga Petra Svirčevića. Vektori se obično koriste pri rješavanju planimetrijskih zadataka, ali se mogu primijeniti i na rješavanje nekih zadataka iz trigonometrije i algebre, o čemu nas upoznaje profesor Milan Šarić iz Kneževa. Profesor Luka Neralić u ovom broju završava seriju članaka o linearnom programiranju.

Dario Hrupec s Instituta "Ruđer Bošković" u Zagrebu upoznaje nas s korištenjem neutrina u astronomji. U rubrici Novosti iz znanosti Matko Milin, znanstveni suradnik u Laboratoriju za nuklearne reakcije, na istom Institutu, piše o primjeni kozmičkog zračenja u razumijevanju svemira.

Na srednjoj dvostrukoj stranici prikazana je u slikama 36. međunarodna fizička olimpijada.

Budućim studentima na Ekonomskom fakultetu namijenjeni su zadaci s prošlih kvalifikacijskih ispita koje donosimo u ovom broju.

Na posljednjoj strani omota prisjetili smo se profesorice Katarine Kranjc, koja je bila prva žena, doktorica fizičkih znanosti u Hrvatskoj, a ujedno osnivačica Jugoslavenskog centra za kristalografiju.

Uredništvo lista



Tesla i fizika

Vladimir Paar[1], *Zagreb*

Uvod

Nikola Tesla je bio počasni član Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti (tada pod nazivom Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti) u Zagrebu gotovo pola stoljeća, od 1896. do 1943. godine. U Akademijinom Ljetopisu Tesla se navodi kao "izumitelj i fizičar". U to doba elektrotehnika još nije bila posebna znanstvena i stručna disciplina, nego je pretežno još smatrana dijelom fizike. Krajem 19. stoljeća tek su vođene rasprave o statusu elektrotehnike u okviru fizike. Rezultat tih rasprava bilo je izdvajanje elektrotehnike kao posebne znanstvene discipline. No treba reći i to da Tesla nije bio samo začetnik ideja i genijalni konstruktor elektrotehničkih uređaja, nego se isticao i znanjem teorijske fizike na polju klasične elektrodinamike, što mu je omogućilo da predvidi, izvede i izračuna djelovanje mnogih svojih izuma.

Svoju ljubav prema fizici pokazivao je još tijekom školovanja u Lici i Karlovcu. Pritom je posebno naglašavao važnost koju je za njegovu kasniju karijeru imala vrlo kvalitetna nastava fizike u školi. Upravo na nastavi fizike duboko se zainteresirao za elektricitet i magnetizam, a profesori su poticali njegovu istraživačku maštu. U svjetskoj znanstvenoj povijesti zauzeo je visoko mjesto svojim izumima iz elektrotehnike, ponajprije velikim brojem izuma i patenata u vezi izmjenične struje. No što je s njegovim otkrićima iz fizike? Tesla se odlikovao impresivnom kreativnošću i znanjem eksperimentalne fizike, koje je bilo i ispred teorijskih znanja tog vremena.

Fizikalna jedinica Tesla (T)

Jedinica	**Znanstvenik po kojemu nosi ime**
Newton (N)	Isaac Newton (1643.-1727.)
Pascal (Pa)	Blaise Pascal (1623.-1662.)
Joule (J)	James Joule (1818.-1889.)
Watt (W)	James Watt (1736.-1819.)
Hertz (Hz)	Heinrich Hertz (1857.-1894.)
Coulomb (C)	Charles Coulomb (1736.-1806.)
Volt (V)	Alessandro Volta (1745.-1827.)
Ohm(Ω)	Georg Ohm (1789.-1854.)
Siemens (S)	Werner Siemens (1816.-1892.)
Henry (H)	Joseph Henry (1797.-1878.)
Farad (F)	Michael Faraday (1791.-1867.)
Weber (Wb)	Wilhelm Weber (1804.-1891.)
Tesla (T)	Nikola Tesla (1856.-1943.)

Tablica 1. Međunarodni sustav jedinica i znanstvenici po kojima su nazvane.

[1] Autor je akademik Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti, redoviti profesor teorijske fizike na fizičkom odsjeku, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, *http://www.hazu.hr/ paar/.*

Međunarodni sustav fizikalnih jedinica uključuje trinaest izvedenih jedinica, koje su nazvane po istaknutim svjetskim znanstvenicima (tablica 1).

Po Tesli, jedinom suvremeniku 20. stoljeća, nazvana je jedinica za magnetsko polje. Ta jedinica može se godišnje naći na milijune puta u znanstvenim i stručnim publikacijama, a daljim razvojem znanosti i tehnologije jedinica, sve više i više će se upotrebljavati.

Tesla – prethodnik mnogih važnih otkrića i izuma

Dok je na području izmjenične struje dobio nedvojbeno svjetsko priznanje i priznati prioritet, na nizu drugih otkrića bio je prethodnik, a što dosad nije adekvatno valorizirano u svjetskoj znanstvenoj povijesti. Tesla je idejni začetnik izuma, kao što su na primjer: vakuumska cijev, fluorescentna svjetiljka, sateliti u geostacionarnoj orbiti, daljinsko upravljanje radiovezom, ionozirana plazma, robot, logički sklop "AND", radar, oružje na zrake, televizija, krstareći projektili, kriogene tekućine i elektricitet, zrakoplov s vertikalnim uzlijetanjem, svjetski sustav za povezivanje komunikacija u jedan globalni sustav (internet) itd. Navedimo samo dva primjera njegove pionirske uloge. Prvi je iznio ideju televizora. Zanimljivo je, kako sam tumači, porijeklo te ideje. U djetinjstvu su mu se priviđale slike, često praćene jakim bljeskovima svjetlosti koje su mu mutile pogled na stvarne predmete i utjecale na misli i djela. Kad bi čuo neku riječ, pojavila bi se živa slika predmeta koja se opisivala u njegovoj viziji. Ponekad nije mogao razlučiti da li je ono što vidi opipljivo ili nije. Potaknut time, smatrao je da te slike izaziva refleksno djelovanje mozga na mrežnicu. Razmišljao je ovako: ako je to objašnjenje točno, na ekranu bi se mogla projicirati slika bilo kojeg predmeta i učiniti je vidljivom. Bio je uvjeren da je "takvo čudo", koje je nazvao televizijom, moguće, i da će se ostvariti u budućnosti. No treba reći da su već i ranije slike bile prenošene električnim kabelima. Drugi zanimljiv detalj iz njegovog bogatog stvaralaštva je ideja radara. Još na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće Tesla je imao jasnu ideju radara za detekciju zrakoplova. Tek tijekom I. svjetskog rata, prijedlog za konstrukciju radara iznio je vladi SAD-a. Taj je prijedlog trebala valorizirati posebna Vladina komisija, kojoj je na čelu bio slavni američki izumitelj i najljući Teslin suparnik, Edison. Nastojeći napakostiti Tesli, odbacio je njegov prijedlog kao nerealan, i tako odgodio otkriće radara za više od dva desetljeća. Najintrigantnija pitanja u vezi ključnih Teslinih fizikalnih otkrića su da li je prvi : 1) otkrio elektron; 2) otkrio rendgenske zrake; 3) napravio i upotrijebio laser i 4) otkrio kozmičke zrake? Osvrnimo se na ova pitanja.

Tesla i otkriće elektrona

Godine 1891. objavio je rezultate svojih pokusa s električnim izbojem u vakuumskoj cijevi i to tumačio kao posljedicu djelovanja električki nabijenih čestica. Na taj članak oštro je reagirao engleski fizičar J. J. Thomson i objavio članak u kojem je osporio Teslin rezultat. Šest godina kasnije upravo je Thomson pokusom u magnetnom polju nedvojbeno dokazao postojanje takvih čestica i nazvao ih elektronima. Za to otkriće dobio je Nobelovu nagradu za fiziku, a da pritom nigdje nije spominjao da je tu ideju ranije iznio i Tesla! Kao što je Thomson prešutio Teslinu ulogu u otkriću elektrona, tako je to kasnije učinila i svjetska znanstvena povijest.

Tesla i otkriće rendgenskih zraka

Prema nekim izvorima, prvi je otkrio *nove zrake*, koje su kasnije dobile ime rendgenske zrake. Godine 1894. u svojim pokusima otkrio je da na fotografskim pločama pokraj katodne cijevi dolazi do oštećenja. Odmah je posumnjao da u katodnoj

cijevi nastaje neko posebno zračenje. No početkom 1895. godine izgorio je Teslin laboratorij i uništio sav materijal i opremu, što ga je onemogućilo u radu na neko vrijeme. U isto vrijeme (8. studenog 1895.) Röntgen je objavio svoje otkriće novih zraka. Može se postaviti pitanje nije li znao za Tesline rezultate, jer je više ljudi znalo za njegovo neobjavljeno otkriće. U svakom slučaju, čini se da je Tesla prvi otkrio rendgenske zrake. U prilog tome govori činjenica da je samo tri mjeseca nakon Röntgena objavio prvi od niza članaka o *novim zrakama* i iznio detalje tehnike njihovog dobivanja. Za dobivanje takvih rezultata trebalo je dulje vrijeme i moglo ih se postići samo opsežnim ranijim istraživanjima. Tesla je 8. 6. 1896. opisao izvor rendgenskih zraka kao mjesto na kojemu katodne zrake prvi put padaju na prepreku. Ta prepreka može biti staklena stijenka vakuumske cijevi ili metalna ploča postavljena u cijev. To je bilo karakteristično i zakočno zračenje, ali u vrijeme Teslinih pokusa, i još godinama kasnije, ta pojava nije bila poznata u fizici. Što se tiče čestičnog karaktera rendgenskih zraka, one zaista pokazuju i čestična svojstva, ali to nisu čestice tvari, kao što je mislio Tesla, nego fotoni, kvanti energije elektromagnetnog zračenja visokih frekvencija. Njegova tvrdnja da su rendgenske zrake brže od katodnih je točna, jer se rendgenske zrake gibaju brzinom svjetlosti.

Nove informacije o Teslinom radu na rendgenskim zrakama pojavile su se 2000. godine objavljivanjem djelomično tipkanih rukopisa s njegovih predavanja iz 1897. godine održanih u *New York Academy of Sciences*, kao i iz dva njegova izvorna članka iz iste godine. U tom, do sada nepoznatom, rukopisu opisuje kako je godinu prije Röntgena otkrio rendgenske zrake i neke zagonetke time postaju jasnije. Teslino nezavisno otkriće rendgenskih zraka, za razliku od Röntgenovog, primarno se zasnivalo na izvorima koji su stvarali rendgenske zrake pretežno procesom zakočnog zračenja, dok je Röntgen upotrijebio izbojnu cijev s plinom koristeći lavinu elektrona. Tesline hladne vakuumske cijevi najbolje su radile s visokim vakuumom. Njegov pristup prethodio je današnjem načinu u visokoenergetskim čestičnim akceleratorima. Godinama je bio ispred svog vremena, jer kvantno mehanička teorija, nužna za razumijevanje Teslinih izvora, pojavila se tek nakon više od četvrt stoljeća. Na temelju tih saznanja slijedi da je Tesla otkrio rendgenske zrake prije Röntgena. Također je kasnijim radom prvi otkrio niz njihovih svojstava. Da u kritičnom trenutku nije došlo do požara u Teslinom laboratoriju, te bi se zrake danas zasigurno zvale Tesline zrake i vjerojatno bi Tesla bio prvi nobelovac za fiziku.

Teslino zračenje i kozmičke zrake

Jedna od nerazriješenih enigmi Teslinih fizikalnih istraživanja odnosi se na Teslino zračenje. On je upotrebljavao termin "radiations" tijekom više od 40 godina i to je bila jedna od njegovih glavnih preokupacija tijekom 20. stoljeća. Nakon 1899. godine gotovo potpuno je prestao objavljivati u znanstvenim časopisima i komunicirati sa znanstvenom javnošću, a okrenuo se popularnim i stručnim predavanjima, intervjuima i nastupima u medijima. Dijelom je to bila posljedica toga što su njegovo eksperimentalno znanje i vještine bile izuzetno visoke razine za tadašnje vrijeme, da je bilo teško uspostaviti kreativni odnos s teorijskom znanošću, a koju niti sam nije dovoljno pratio. S druge strane, ponašajući se sve više kao čudak, gubio je vjerodostojnost u znanstvenim krugovima. Zato je teško rekonstruirati značaj i doseg njegovih istraživanja na područjima fundamentalnih istraživanja koja su bila izvan okvira prijavljenih patenata.

Otkriće Teslinog zračenja i sam je smjestio u 1897. godinu. Tada je bio uvjeren da je u svojim pokusima dokazao prisustvo tog zračenja. Nekoliko godina kasnije prijavio je patent u kojemu je predložio metodu za korištenje tog zračenja. Prema Tesli, izvor tog zračenja je svemirski prostor, ali ga je također moguće dobiti u vakuumskoj cijevi. To zračenje: a) se sastoji od čestica "infinitezimalne" veličine (tzv. Tesline čestice), koje nose mali pozitivni naboj – fragment elementarnog naboja; b) prodire kroz tvar skoro bez interakcije; c) može se gibati brzinom većom od brzine svjetlosti; d) može inducirati radioaktivnost jer destabilizira atomsku jezgru na koju nalijeće; e) dolazi na Zemju iz svemira iz svih smjerova; f) emitiraju sve zvijezde, pa tako i Sunce. Teslino zračenje moguće je dokazati pokusima s vakuumskom cijevi. Tesla je u pokusima koristio izvanredno visoke napone. U svojim vakuumskim cijevima ubrzavao je elektrone do energije od 2.4 MeV, što znači da je ustvari stvorio linearni čestični akcelerator. Iz prethodnog je jasno da Teslinom zračenju odgovara kozmičko zračenje. O zračenju koje Zemlju stalno bombardira iz svemira govorio je gotovo dva desetljeća prije nego što je 1912. godine direktno dokazano eksperimentima u kojima se pomoću balona dizao uređaj s elektrometrima na visinu od blizu desetak kilometara. Smatrao je da bi se ogromna energija kozmičkih zraka koje stalno zapljuskuju Zemlju mogla koristiti i kao ekološki čist izvor energije za čovječanstvo. Također je ispravno predvidio da su kozmičke zrake pozitivno nabijene (danas znamo da su to u svemirskom prostoru pretežno protoni), te da mogu izazvati umjetnu radioaktivnost, inače stabilnih atomskih jezgara, što je pokusom otkriveno 1934. godine, ali nije bio u pravu vjerujući da je svaka radioaktivnost tog tipa. Zanimljivo je da je tvrdio da u Teslinom zračenju postoje čestice s frakcijom elementarnog naboja. Jedine takve čestice u modernoj teorijskoj fizici su kvarkovi. No svi pokušaji da ih se direktno pojedinačno dokaže ostali su bezuspješni. Po svojstvu da prodiru kroz tvar gotovo bez interakcije, Teslino zračenje bi podsjećalo na neutrine, no nije vjerojatno da su se nalazili u Teslinom zračenju koje je opažao u svojim uređajima.

Tesla i otkriće lasera

Godine 1893. konstruirao je rubinski uređaj koji je električki pobuđivao i dobivao "svjetlosnu zraku tanku poput olovke". Taj je uređaj bio po konstrukciji sličan rubinskom laseru i vjerojatno je Tesla dobio laserski snop svjetlosti. Prema nekim izvorima, 1918. je taj svjetlosni snop poslao na Mjesec. Problem s praktičnom primjenom tog uređaja bio je u tome što se brzo oštećivao. Teškoće s evaluacijom Teslinog lasera su u tome što je ona svoja otkrića koja nisu patentirana, prikazivao na stručnim i popularizacijskim skupovima i u popularnim napisima, a ne u znanstvenim časopisima, pa ne postoji pobliži uvid u njegove stvarne rezultate. Očito je imao komponente za konstrukciju lasera, ali nema jasnog dokaza da je zaista dobio laserski snop. No treba reći da nije mogao imati zamisao inverzije naseljenosti stanja, koja je ključna za razumijevanje fizikalnog principa lasera i masera, a koju je tek kasnije iznjedrila kvantna fizika. Moguće je da su "zrake smrti" kojima se Tesla često hvalio pred javnošću u stvari bile laserske zrake.

Osnove atmosferskog elektriciteta

Božena Volarić[1] *i Eugen Vujić*[2]*, Zagreb*

Uvod

Misao o porijeklu i postojanju električnog polja u Zemljinoj atmosferi zaokupljala je odavna pažnju znanstvenika. Mnogobrojna istraživanja dovela su do spoznaje o povezanosti električnog stanja atmosfere u područjima izvan domašaja grmljavinskih procesa, tzv. *područja lijepoga vremena* i onih, pogođenih grmljavinskom aktivnošću, tzv. *poremećena područja*. Sredinom 18. stoljeća, u razmaku od mjesec dana, eksperimentalno dokazuje električnu narav munje ponajprije T. F. D'Alibard po zamisli B. Franklina, a zatim i sam B. Franklin pomoću svog glasovitog eksperimenta sa zmajem. Spoznalo se da električne pojave u atmosferi nisu ograničene na grmljavinske dane nego da atmosfera stalno, tj. i pri lijepom vremenu, posjeduje električna svojstva iako slabije jakosti. Pri lijepom neporemećenom vremenu električno polje je usmjereno prema Zemljinoj površini. Prosječna mu jakost u prizemnim slojevima atmosfere iznosi oko 130 Vm^{-1}. Naprotiv, kod grmljavinskih oluja električno polje u atmosferi uglavnom je usmjereno od tla prema bazi oblaka postižući katkada vrijednosti i do desetak tisuća volta po metru, pa i više, ovisno o jačini električnih procesa u grmljavinskom oblaku. Električno polje je *planetarno* svojstvo Zemlje, tj. svojstvo Zemlje kao cjeline, što potvrđuju mnogobrojna mjerenja. Uobičajilo se atmosfersko električno polje označavati kao *pozitivno*, ako je usmjereno prema tlu. Prema tom dogovoru električno polje lijepog, neporemećenog vremena je pozitivno, dok je grmljavinsko polje uglavnom negativno. Kod oblačnog i kišovitog vremena smjer električnog polja nije izričito određen, može poprimiti jedan ili drugi smjer.

Promjena polja s visinom

U početnoj fazi istraživanja atmosferskog elektriciteta smatralo se da se radi o elektrostatskom polju uzrokovanom električki nabijenom Zemljom. Uz pretpostavku da se u atmosferi nalazi elektrostatsko polje, jakost bi mu prema Gaussovom zakonu opadala udaljavanjem od površine Zemlje. Tek na visini od oko 32 km smanjila bi mu se jakost za 1%, uzevši da srednji polumjer Zemlje iznosi 6 400 km. Međutim, stvarna mjerenja pokazuju naglo visinsko opadanje, tako da na 2 km iznad tla jakost polja iznosi oko $1/5$ prizemne vrijednosti, dok na visini 10 km tek nekoliko volta po metru. Jakost električnog polja smanjuje se visinom približno po eksponencijalnom zakonu. Neki istraživači odredili su empirijske jednadžbe za izračunavanje visinskih promjena jakosti atmosferskog električnog polja. Navodimo onu po O. H. Gishu, koja glasi

$$E(h) = 81.8 \cdot e^{-4.52\cdot 10^{-3}h} + 38.6 \cdot e^{-0.375\cdot 10^{-3}h} + 10.27 \cdot e^{-0.121\cdot 10^{-3}h} \tag{1}$$

gdje je visina h izražena u metrima, a $E(h)$ u voltima po metru.

[1] Autorica je umirovljena djelatnica Geofizičkog zavoda "Andrija Mohorović", PMF-a u Zagrebu.

[2] Autor je znanstveni novak Geofizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu.

Atmosferski ioni

Atmosfera se dugo vremena smatrala izolatorom, iako je ponašanje električnog polja ukazivalo na postojanje električnog naboja u donjim slojevima atmosfere. Francuski fizičar C. A. Coulomb već je krajem 18. stoljeća ukazivao na gubitak elektriciteta kod nabijenih tijela, izolirano postavljenih u prirodi. Ispravno tumačenje Coulombovog pokusa, kasnije nazvanog *rasap elektriciteta*, uslijedilo je tek nakon više od 100 godina, otkrićem nabijenih čestica u atmosferi, nazvanih *atmosferski ioni*. U atmosferi ioni nastaju procesom ionizacije pri kojem vanjsko zračenje izbije elektron iz vanjske elektronske ljuske molekule/atoma zraka. Rad potreban za izbijanje elektrona daje kinetička energija sudarenih čestica ili energija fotona elektromagnetskog zračenja. Oslobođeni elektron, kao i pozitivni ostatak molekule nestabilni su pri normalnim atmosferskim uvjetima, pa se u vrlo kratkom vremenu smještaju na neutralne molekule zraka. Elektron pri tome najčešće sjeda na molekulu kisika ili vode. Tako nastale tvorevine obaju predznaka također nisu postojane u atmosferi. Međutim, oni polariziraju okolne neutralne molekule zraka, od kojih zadrže oko sebe 10-30 najbližih, djelovanjem električne sile između centralne ionizirane molekule i okolnih polariziranih (neutralnih), formirajući na taj način nakupinu molekula (engl. cluster) nazvanu *mali ion*. Sve tri faze nastajanja malih iona – otkidanje elektrona, njihovo odlaganje na neutralne molekule i okupljanje polariziranih molekula oko njih – odvija se vrlo brzo, u roku kraćem od 10^{-6} sekunda. U atmosferi postoje i *veliki ioni* odnosno *Langevinovi ioni* nazvani po francuskom fizičaru P. Langevinu. Veliki ioni nastaju odlaganjem malih iona na aerosole, raspršene više-manje posvuda u atmosferi. Mogu nastati i direktnom ionizacijom, primjerice raspršivanjem vodenih kapljica kod vodopada (Lenardov efekt). Istovjetno nastaju i udaranjem valova o morsku obalu ili kidanjem kapljica pri jakim uzlaznim zračnim strujama u grmljavinskom oblaku. Veliki ioni nastaju i kod plamena izgaranjem materije, naročito kod šumskih požara. Također i kod snježne vijavice drobljenjem snijega, ali i trenjem u uzvitlanoj prašini ili lančanom reakcijom pri udarnoj ionizaciji u jakom električnom polju. Pored tih u atmosferi postoje i *srednji ioni*. Po veličini se nalaze između velikih i malih iona kojih je u atmosferi znatno manje nego velikih iona. Nastaju pretežno u industrijskim predjelima gdje je atmosfera onečišćena česticama sumporne kiseline. Atmosferski ioni međusobno se ne razlikuju po količini elektriciteta, koja je kod svih jednaka elementarnom naboju elektrona, nego po masi. Vrlo rijetko, samo u iznimnim slučajevima veliki ioni mogu imati više od jednog elementarnog naboja.

Ionizacija atmosfere

Glavni ionizatori su: *kozmičko zračenje*, *radioaktivno zračenje* i *ultraljubičasto Sunčevo* zračenje. Najvažnija je značajka glavnih ionizatora što djeluju neprekidno.

Kozmičko zračenje: Na Zemlju, danju i noću, kontinuirano padaju kozmičke zrake sa svih strana iz svemira, neprekidno ionizirajući atmosferu. Maksimalna ionizacija atmosfere se postiže na visini oko 13 km iznad Zemljine površine, gdje jačina ionizacije q, tj. broj nastalih ionskih parova po $1\,\mathrm{m}^3$ zraka u 1 sekundi $(\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1})$ iznosi $5 \cdot 10^7$. Pri daljnjem napredovanju prema tlu i nailasku na sve gušće atmosferske slojeve slabi im ionizacijska moć tako da na razini mora kod $0\,^\circ\mathrm{C}$ i tlaka zraka 1 000 hPa u umjerenim zemljopisnim širinama proizvedu u prosjeku $1 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^6$ ionskih parova po $\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$. Jačina ionizacije q kozmičkih zraka ne pokazuje dnevnu oscilaciju, ali varira s geomagnetskom širinom i 11-godišnjim ciklusom Sunčeve aktivnosti. Kozmičke zrake

su električki nabijene čestice koje su zbog gibanja u geomagnetskom polju otklonjene od prvobitnog smjera. Otklon je najjači oko geomagnetskog ekvatora. Idući prema većim geomagnetskim širinama otklon slabi, a ionizacija jača. Za vrijeme minimalnog broja Sunčevih pjega, ionizacija kozmičkih zraka u atmosferi iznad 30 km, raste s udaljenošću od geomagnetskog ekvatora prema polu skoro dva puta brže nego za vrijeme maksimalnog broja pjega na Suncu. Ovisnost ionizacije kozmičkih zraka o meteorološkim uvjetima nije zapažena osim u vezi s promjenama tlaka zraka. Poraste li tlak zraka na morskoj razini za oko $3/4$ hPa jačina ionizacije se smanji za 7-8 ‰. Pojava je nazvana *barometarski efekt*.

Radioaktivno zračenje: Posvuda na Zemlji nalaze se u tragovima radioaktivni elementi (torij, uran, radij, aktinij). Količina im varira ovisno o vrsti tla. U oceanima također ima radioaktivnih elemenata, ali u mnogo manjim količinama. Kao ionizatori atmosfere radioaktivni elementi djeluju dvojako: direktnim zračenjem iz tla i zračenjem emanacija raspršenih u atmosferi. Direktna ionizacija ograničena je na sloj zraka uz tlo i ovisi o vrsti zračenja. Iako α-zrake imaju najveću energiju, apsorpcijom u tlu je gube, stoga im je domet u atmosferi, a time i ionizacija, zanemariva. Slično vrijedi i za β-zrake. Međutim, γ-zrake, kao elektromagnetsko zračenje, imaju znatno veću sposobnost prodiranja, pa u sloju zraka neposredno uz tlo djeluju ionizirajuće. Emanacije su plinoviti potomci radija, torija i aktinija. U atmosferu dolaze iz pora i pukotina tla. Turbulentne i vertikalne uzlazne zračne struje, kao i horizontalne, raznose ih po atmosferi. Pri tome emanacije zračenjem ioniziraju molekule zraka, ali sada bez znatnijih gubitaka energije uslijed apsorpcije kao u prethodnom slučaju, pa su najdjelotvornije α-zrake. Za ionizaciju atmosfere najvažniji je radon (od radija), jer među emanacijama ima najdulje poluvrijeme raspadanja. U prizemnom sloju atmosfere, debljine 1 do 2 m, jačina ionizacije α-zraka iznosi oko $2 \cdot 10^7$ ionskih parova po $\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$. Radioaktivni potomci emanacija su dugovječni, stoga su i oni kao ionizatori zanemarivi, pošto ih iz atmosfere *isperu* oborine prije nego što uspiju dati svoj doprinos ionizaciji atmosfere. Ionizacija atmosfere proizvedena emanacijama i njihovim potomcima vrlo je promjenjiva. Ovisi ne samo o njihovoj količini već i o njihovoj raspršenosti po atmosferi, odnosno o meteorološkim uvjetima.

Ultraljubičasto Sunčevo zračenje: U visokoj atmosferi glavni ionizator je ultraljubičasto Sunčevo zračenje. Na visinama oko 70-80 km stvara jako vodljiv električni sloj, koji igra važnu ulogu u električnim zbivanjima Zemljine atmosfere. U stratosferi, posebice u ozonosferi, na visinama 40-50 km, ozon jako apsorbira ultraljubičasto Sunčevo zračenje, pa u donje slojeve atmosfere dopire tek u neznatnim količinama, gdje je njegovo ionizirajuće djelovanje zanemarivo. Primarni izvor ionizacije atmosfere iznad oceana su kozmičke zrake. Isto vrijedi i za atmosferu iznad kopna, izuzev prizemnih slojeva i visoke atmosfere. Kod nastanka velikih iona prethodno su poimence nabrojeni sporedni ionizatori. Usprkos katkada snažnoj ionizaciji ipak nemaju globalno značenje, jer im je djelovanje i vremenski i prostorno ograničeno.

Razaranje atmosferskih iona

Uz ionizaciju u atmosferi istodobno djeluju i procesi koji razaraju male ione. U neporemećenim vremenskim situacijama broj razorenih malih iona u jediničnom volumenu zraka u 1 sekundi razmjeran je broju svih prisutnih iona. Razaranje malih iona nastaje uslijed:

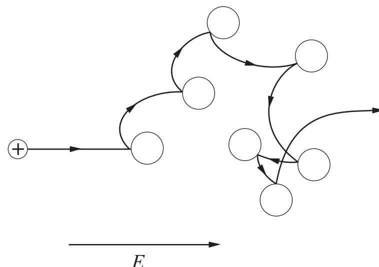
– rekombinacije malih iona suprotnih predznaka u neutralne molekule;

– kombinacije malog i velikog iona suprotnih predznaka u neutralnu kondenzacijsku jezgru i neutralne molekule;

– kombinacije malog iona s neutralnom kondenzacijskom jezgrom u veliki ion. Međusobna rekombinacija velikih iona rijetko se događa zbog njihove tromosti, stoga se obično zanemaruje. Isto vrijedi i za srednje ione, tim više što ih ima relativno malo u atmosferi.

Pokretljivost iona

Ioni se u atmosferi gibaju pod djelovanjem električnog polja. Ujedno sudjeluju i u toplinskom Brownovom gibanju sudarajući se s molekulama zraka. Gibanje im stoga postaje složeno (slika 1).



Slika 1. Gibanje iona u atmosferskom električnom polju. Kružići predstavljaju neutralne atome/molekule.

Brzina v prosječnog gibanja iona u električnom polju razmjerna je jakosti polja E tj. $v = k \cdot E$. Veličina k je pokretljivost iona i predstavlja brzinu kojom se ioni gibaju u atmosferskom električnom polju jakosti $1\,\mathrm{Vm}^{-1}$. Za male ione iznosi $1 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4\ \mathrm{m}^2\mathrm{V}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$, a za velike ione je oko 5 000 puta manja.

Vodljivost atmosfere

Prisutnost pokretljivih iona i električnog polja u atmosferi čini atmosferu električki vodljivom. U smjesi raznih molekula zraka i iona, ukupna vodljivost atmosfere λ jednaka je sumi vodljivosti po svim vrstama iona oba predznaka

$$\lambda = e \cdot \left(\sum_i n_i^+ k_i^+ + \sum_i n_i^- k_i^- \right) \qquad (2)$$

gdje je: $e =$ elementarni naboj; $n_i =$ broj iona i-te vrste po jedinici volumena i $k_i =$ pokretljivost iona. Veliki i srednji ioni ne samo što malo doprinose električnoj vodljivosti atmosfere, nego je dapače indirektno i umanjuju kombinacijom s malim ionima. U odnosu na metale i ostale vodiče elektriciteta vodljivost atmosfere je gotovo zanemariva. Srednja joj vrijednost u prizemnim slojevima iznosi oko $2.5 \cdot 10^{-14}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Uspoređujući je s izolatorima, recimo jantarom, čija je vodljivost reda veličine $10^{-18}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, atmosfera se usprkos lošoj vodljivosti ne može uvrstiti među izolatore. Naprotiv, kod mjerenja elemenata atmosferskog elektriciteta treba posebno voditi računa o izolaciji instrumenata. Vodljivost atmosfere raste s visinom. U troposferi do nekih 3 km visine neznatno se mijenja. Daljim uzdizanjem započinje njen nagli porast i već na 10 km visine vrijednost joj je 12 do 15 puta veća nego u prizemnom sloju. Gornja atmosfera je dobar vodič elektriciteta uslijed snažne ionizacije ultraljubičastog Sunčevog zračenja.

Vodljivosti naročito doprinose slobodni elektroni. Ispod 50 km visine zanemariv je njihov doprinos ukupnoj električnoj vodljivosti atmosfere, ali iznad 60 km oni su glavni nosioci naboja. Na visini od oko 70-80 km, obuhvaćajući gornje dijelove mezosfere i donje ionosfere, nalazi se sloj znatne električne vodljivosti, ekvivalentan dobrom vodiču elektriciteta. Dosegnuvši visinu tog sloja električni naboj će ubrzo, za manje od minute, biti jednoliko raspoređen oko cijele Zemlje. Stoga je dobio naziv *sloj izravnanja*. Uzevši u obzir nedovoljnu električnu vodljivost nižih dijelova atmosfere, *sloj izravnanja* i površina Zemlje, koja je također relativno dobar vodič elektriciteta, sačinjavaju obloge koncentričnog kuglastog kapacitora. Zrak među oblozima kapacitora zbog svoje vodljivosti, male, ali ipak nezanemarive, nije idealan izolator, pa oblozi nisu potpuno izolirani jedan od drugoga, što dovodi do pražnjenja kapacitora.

Prostorni naboj

Ionizacijom u atmosferi nastaje jednak broj iona obaju predznaka. Uslijed njihove nejednake mase, ali iste količine elektriciteta, različito se očituje djelovanje električnog polja na njih. Dolazi do prostornog odvajanja i nejednolike raspodjele iona u atmosferi. Pozitivni ioni putuju prema površini Zemlje, a negativni u suprotnom smjeru. Na gibanje utječu i meteorološki faktori, naročito zračne struje raznoseći ih posvuda u atmosferi. Višak iona jednog predznaka u jediničnom volumenu zraka naziva se *prostorni naboj* atmosfere. Definiran je izrazom:

$$\rho = e \cdot (n^+ - n^-) \tag{3}$$

gdje je: ρ = gustoća prostornog naboja; e = elementarni naboj; n^+, odnosno, n^- = broj pozitivnih, odnosno negativnih iona u jediničnom volumenu zraka. S visinom prostorni naboj atmosfere naglo opada, a koristeći Gaussov zakon u diferencijalnom obliku i relaciju (1), dobivamo izraz za visinsku promjenu prostornog naboja

$$\rho = 3.26 \cdot 10^{-12} e^{-4.52 \cdot 10^{-3} \cdot h} + 1.28 \cdot 10^{-13} \cdot e^{-3.75 \cdot 10^{-4} \cdot h} + 1.1 \cdot 10^{-14} \cdot e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot h} \tag{4}$$

u kojem je ρ izražen u Cm^{-3}, a visina h u metrima. Pri neporemećenim vremenskim situacijama u atmosferi prostorni naboj je pozitivan. Gustoća prostornog naboja ide – u prosjeku – od nekih $3.2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{Cm}^{-3}$ u blizini tla, do nekih $1.29 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{Cm}^{-3}$ na 10 km visine. U pojedinim slučajevima, posebno u donjim dijelovima atmosfere, mogu biti znatna odstupanja od srednje vrijednosti uslijed izraženog utjecaja meteoroloških uvjeta. Ukupna količina pozitivnog prostornog naboja, sadržanog u vertikalnom stupcu zraka od tla do 9 km visine, presjeka 1 m^2, iznosi oko $1.11 \cdot 10^{-9}$ C.

Površinska gustoća

Na površini Zemlje u neporemećenim područjima nalazi se negativan naboj. Potvrđen je brojnim mjerenjima širom svijeta. Između gustoće naboja σ na površini vodiča i jakosti električnog polja E koje inducira taj naboj postoji odnos

$$\sigma = \varepsilon_0 E. \tag{5}$$

Pri jakosti atmosferskog električnog polja $E = 130\,\mathrm{Vm}^{-1}$, što predstavlja prostornu i vremensku srednju vrijednost za prizemnu atmosferu, površinska gustoća negativnog naboja iznosi $-1.15 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{Cm}^{-2}$, te je količina negativnog naboja na površini Zemlje približno jednaka ukupnom prostornom pozitivnom naboju sadržanom u otprilike 9 km visokom vertikalnom stupcu atmosfere presjeka $1\,\mathrm{m}^2$. Zemlja, dakle, u cjelini djeluje prema svemirskom prostoru približno kao električki neutralno tijelo.

Vertikalna struja

Električna struja koja neprekidno teče kroz atmosferu, donoseći u neporemećenim područjima pozitivni naboj na površinu Zemlje zove se *vertikalna struja lijepoga vremena* ili kraće *vertikalna struja*. Gustoća joj je $2 \cdot 10^{-12}$ Am^{-2} na svim visinama. Na Zemlju pritječe ukupno oko 1 600 A. U stacionarnom ravnotežnom stanju vertikalnu gustoću struje j, vodljivost atmosfere λ i jakost električnog polja E međusobno povezuje Ohmov zakon

$$j = \lambda \cdot E. \tag{6}$$

Za razliku od ostalih veličina vertikalna gustoća struje se ne mijenja s visinom. Vertikalna struja igra značajnu ulogu u atmosferskim električnim odnosima. Dovodeći neprekidno pozitivni naboj na Zemlju, njen negativni naboj bi se neutralizirao za oko 10 minuta. U stvari neutralizacija bi trajala nešto dulje, jer postepenim neutraliziranjem pozitivnog prostornog naboja atmosfere i negativnog naboja Zemlje slabilo bi atmosfersko električno polje. Ujedno bi slabila i vertikalna gustoća struje, a to bi usporavalo proces neutralizacije. Proces bi ipak bio završen za oko pola sata. Usprkos opisanim električnim zbivanjima električno polje i nadalje neprekidno postoji posvuda u atmosferi. To znači da postoji proces koji ga stalno obnavlja i održava, a to je grmljavinska aktivnost.

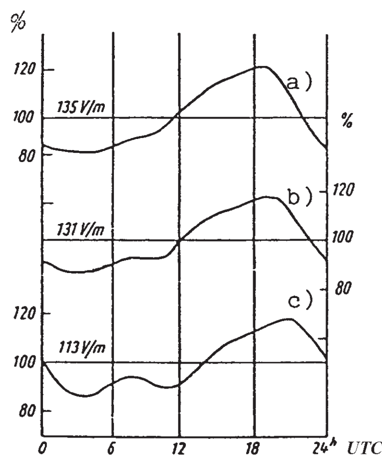
Promjena polja sa zemljopisnom širinom

Jakost električnog polja u prizemnoj atmosferi varira od mjesta do mjesta odstupajući katkada znatno od vrijednosti 130 Vm^{-1}, što predstavlja srednju vrijednost za cijelu Zemlju. U blizini gusto naseljenih krajeva jakost je iznad srednje vrijednosti. U manjim mjestima ili izvan njih poprima niže vrijednosti. Iznad oceana jakost polja nije prostorno toliko varijabilna, ali pokazuje izrazitu vezu sa zemljopisnom širinom. Pojava je nazvana *širinski efekt jakosti polja*. Nastaje uslijed djelovanja geomagnetskog polja, koje otklanjajući kozmičke zrake sprečava njihovo prodiranje u područje oko ekvatora do otprilike 60° sjeverne i južne širine. S tim u vezi oslabljena je ionizacija atmosfere što dovodi do smanjenja jakosti atmosferskog električnog polja. Iznad kopna pojava nije zapažena. Zasigurno postoji, ali je prekrivena drugom, jače izraženom pojavom, vjerojatno izazvanom promjenama meteoroloških parametara.

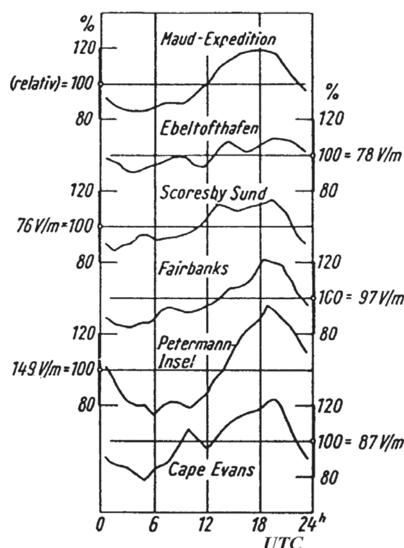
Oscilacije atmosferskog električnog polja

Tražeći odgovor na pitanje što održava električno polje unatoč razarajućem djelovanju vertikalne struje, podrobno su analizirane vremenske promjene atmosferskog elektriciteta, posebno električnog polja. Već su početna istraživanja ukazala na njegovu pravilnu dnevnu oscilaciju, a zatim i godišnju.

Postoje dva tipa dnevnih oscilacija atmosferskog električnog polja: oceanski i kontinentalni. Ovaj posljednji javlja se u tri oblika, pa ih je ukupno: a) oceanski tip; b) kontinentalni tip s jednostrukim periodom; c) kontinentalni tip s dvostrukim periodom i d) prijelazni kontinentalni tip. Budući da se meteorološki elementi iznad prostrane jednolične površine oceana tijekom dana ne mijenjaju znatno, dnevna oscilacija električnog polja oceanskog tipa ovisna je samo o promjenama ionosferskog potencijala u odnosu na tlo, te je globalnog karaktera. Stoga ima isti oblik iznad svih oceana. Prema svjetskom vremenu (UTC) ekstremi posvuda nastupaju istodobno (slika 2). Analogno tome, tj. bez značajnijih dnevnih promjena meteoroloških elemenata, dnevna oscilacija električnog polja iznad ledenih prostranstava Arktika i Antarktika ima oblik jednostrukog perioda, s nastupom ekstrema u isto doba dana kao i nad oceanima (slika 3).



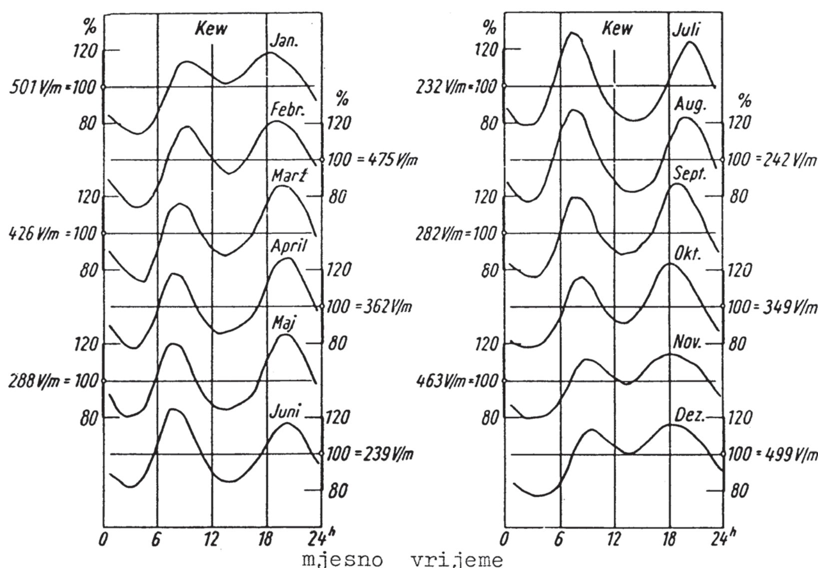
Slika 2. Srednja dnevna oscilacija atmosferskog električnog polja iznad oceana: a) zima, b) proljeće i jesen, c) ljeto.



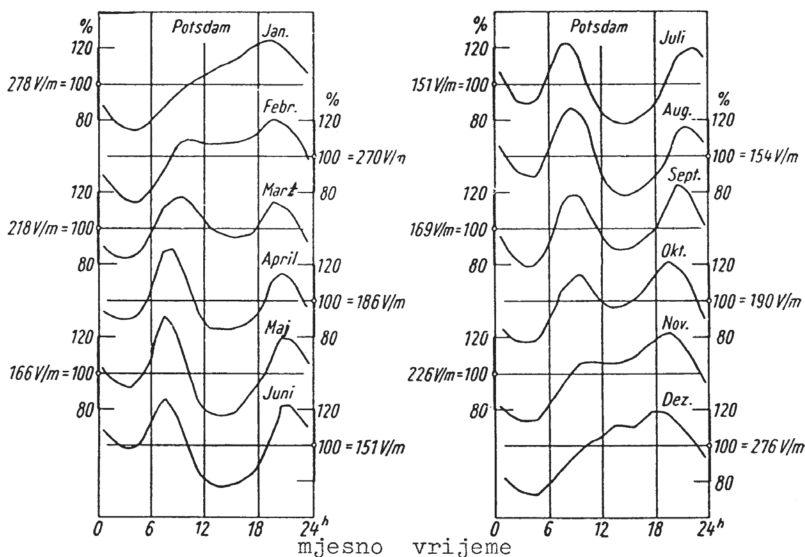
Slika 3. Srednja dnevna oscilacija atmosferskog električnog polja za arktičke i antarktičke postaje.

Za razliku od polarnih područja, *iznad ostalog dijela kopna* meteorološki elementi imaju izraziti lokalni dnevni hod, osobito u toplom dijelu godine. S tim u vezi nastaju dodatne dnevne promjene u električnim atmosferskim odnosima, što se očituje u obliku dnevne kontinentalne oscilacije električnog polja s dva minimuma i dva maksimuma (slika 4). Prijepodnevni maksimum pripisuje se djelovanju ljudske aktivnosti, dok je poslijepodnevni minimum posljedica dnevnog razvoja meteoroloških faktora, prvenstveno pojačane turbulencije i uzlaznih zračnih struja, koje u to doba dana postižu maksimalni razvoj. Uzlazno strujanje odvodi ione iz prizemnih slojeva u visinu izazivajući promjenu električne vodljivosti i pad električnog polja pri tlu.

Kod dnevne kontinentalne oscilacije s dvostrukim periodom jutarnji se minimum javlja tijekom cijele godine oko 4 sata, dok se oba maksimuma ravnaju po izlazu i zalazu Sunca uz kolebanje poslijepodnevnog minimuma oko 14 sati. Kako je položaj maksimuma ovisan o duljini svjetlosnog dijela dana, razmak među njima varira tijekom godine. Zimi iznosi oko 7 sati, ljeti oko 12 sati. *Prijelazni oblik* kontinentalne dnevne oscilacije pokazuje smjenu oblika s jednostrukim periodom u dvostruki suglasno godišnjim dobima (slika 5). Tijekom zime ima jednostruki, a tijekom ljeta dvostruki period. Od navedenih oblika kontinentalne dnevne oscilacije, prijelazni je oblik najčešći. Preostala dva su rjeđa, osobito kontinentalni tip s jednostrukim periodom. Taj u pravilu nastupa na mjestima s razmjerno malim sadržajem suspendiranih aerosola u atmosferi i neznatnim dnevnim razvojem meteoroloških parametara, čemu pogoduje jednolika podloga kao u slučaju polarnih područja. Izostaje lokalni utjecaj i dnevna se oscilacija očituje kao 24-satni titraj. Dnevna kontinentalna oscilacija dvostrukog perioda ograničena je na prizemne slojeve. S visinom slabi utjecaj podloge, stoga izostaje titraj kraće periode, što potvrđuju brojna mjerenja širom svijeta. Na otoku Samoa nestaje dvostruki period u dnevnoj oscilaciji već na 15 m iznad tla; u Uppsali još i bliže tlu, na svega 9 m. U gradskim područjima dnevne promjene električnog polja uglavnom su oblika kao na slici 4., dok u ruralnim područjima imaju jednostruki period.

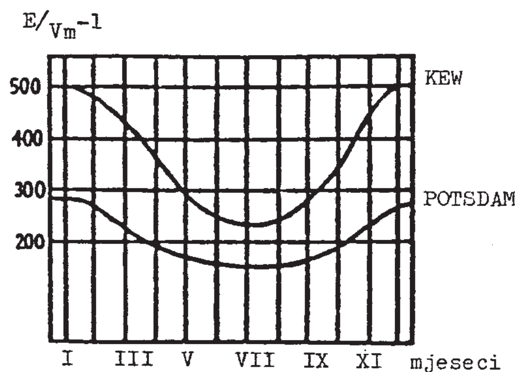


Slika 4. Srednja dnevna oscilacija atmosferskog električnog polja, opservatorij KEW (Engleska, 1898-1931.).



Slika 5. Srednja dnevna oscilacija atmosferskog električnog polja (prijelazni oblik), opservatorij POTSDAM (Njemačka, 1904-1923).

Tijekom godine jakost se atmosferskog električnog polja pravilno mijenja pokazujući izrazitu godišnju oscilaciju. Na sjevernoj hemisferi maksimum se javlja u zimskim mjesecima, minimum u ljetnim (slika 6), dok im je na južnoj obrnut redoslijed.



Slika 6. Godišnja oscilacija atmosferskog električnog polja:
a) opservatorij KEW, Engleska, b) opservatorij POTSDAM, Njemačka.

Kod godišnje oscilacije, slično kao i kod dnevne oscilacije iznad kontinenata, preklapaju se dva utjecaja: globalni i lokalni. Prvi djeluje istodobno na cijeloj Zemlji, dok drugi, u suglasju s izmjenom godišnjih doba, uvjetuje suprotan oblik godišnje oscilacije na sjevernoj od one na južnoj hemisferi.

Meteorologija-atmosferski

Općenito se može reći da postoji očita veza između meteoroloških uvjeta i električnog stanja atmosfere, na lokalnoj i globalnoj razini. Naime, meteorološki parametri lokalnih razmjera, primjerice kao vjetar, magla, sumaglica i ostali hidrometeori mogu značajno mijenjati vodljivost atmosfere u prizemnom sloju, što znači da se u tim slučajevima krivulje zapisa atmosferskog električnog polja mogu razlikovati kratkotrajnim promjenama i na malim udaljenostima. Isto tako, ali naglašenije i trajnije djeluju događaji globalnih razmjera, primjerice velike vulkanske erupcije, izbacujući pepeo i plinove u atmosferu, mogu uvelike povećati koncentraciju aerosola u srednjoj atmosferi, čak i nekoliko godina nakon erupcije. Time se smanjuje vodljivost atmosfere, jer je povećan broj velikih iona, ali se povećava razlika potencijala između sloja izravnanja, tj. između donjih slojeva ionosfere i tla. Promjene atmosferskog električnog polja očituju se kroz dulje vrijeme i obuhvaćaju šira područja. Iznad planinskih područja otpor stupca zraka jedinične površine je manji nego nad površinom mora, pa razlika potencijala između ionosfere i tla daje veću gustoću struje.

Literatura

[1] J. A. Chalmers, *Atmospheric Electricity*, Oxford Claredon Press (1949).
[2] H. Israël and H. Dolezalek, *Atmospheric Electricity*, Keter Press Binding: Wiener Bindery Ltd, Jerusalem (1973).
[3] K. Kähler, *Das luftelektrische Potentialgefälle in Potsdam 1904. – 1923.*, Met. Zeit. , 42, 69-71 (1925).
[4] G. H. Liljequist and K. Cehak, *Die atmosphärische Elektrizität*, (in Allgemeine Meteorologie), Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1979).
[5] B. Volarić, *Hrvatski meteorološki časopis, 39*, 83–102 (2004).
[6] H. Volland, *Atmospheric Electrodynamics*, Springer-Verlag (1984).

Pobornici i protivnici Einsteinove teorije relativnosti u Hrvatskoj 1905. – 1955.

Branko Hanžek[1], *Zagreb*

Znanost je ljudska tvorevina i umjesto da se piše o tvorcima, piše se o tvorevini. A tamo gdje su u prvom planu ljudi bilo je, ima i bit će i slaganja i protivljenja. Tako je i s Einsteinovom teorijom relativnosti.

Događa se da istraživači "nađu" ono što žele naći, pa makar bili na pogrešnom putu. Kao da se ponavlja ono što je potaknuo još Galileo Galilei – pitanje je na osnovi kojeg se valjanog pojedinačnog pokusa može dalje valjano zaključivati o općenitomu. Također, ima ljudi koji vjeruju u ono što se tvrdi, no da izravnih dokaza za dotične tvrdnje nema, ali postoje posredni dokazi, eksperimentalnog tipa, a ti posredni dokazi nedvojbeno ukazuju na to da ta tvrdnja ipak stoji. Znanost često ide nekom vrstom srednjeg puta, ili drugačijeg puta, istraživači napreduju, uglavnom znajući prema čemu teže (očekujući konkretno rješenje). Za napredovanje su korisni i oni koji sumnjaju, jer svojim prigovorom mogu biti zaslužni za popravljanje puta. I za teoriju relativnosti bilo je veoma korisno djelovanje njezinih protivnika.

Uključivanjem protivnika u priču mi u stvari nastojimo spojiti oprez s već postojećom smjelošću pobornika koji bez pravih dokaza brane teoriju oslanjajući se samo na povjerenje i osjećajnost. To spajanje ide sve dotle dok smjelost kao aktivno nastojanje ne probije nove putove ka pravim, kvalitetnim dokazima.

Što se tiče Hrvatske i teorije relativnosti, vrijedi istaći da je i ovdje, kao i u svijetu, bilo valjanih pobornika, ali i protivnika. U radu će se razmotriti djelovanje jednih i drugih u vremenu od 1905. do 1955. godine.

Jedan od prvih pobornika teorije relativnosti u Hrvatskoj bio je prvi profesor fizike na obnovljenom sveučilištu u Zagrebu Vinko Dvořăk (1848.–1922.) On je u svojem sveučilišnom predavanju i vježbama iz optike već 1908./09. spominjao čuveni Einsteinov kupe vlaka misleći pri tom na Einsteinovo tvrđenje o istovremenosti dvaju različitih događaja gledano iz dva različita inercijalna sustava.

Dvořăkov nasljednik Stanko Hondl (1873.–1971.), fizičar, u svojim je sveučilišnim predavanjima 1910. godine koristio Einsteinovu teoriju relativnosti, poslije je o teoriji relativnosti napisao tri rada, a bio je prvi koji je u svom srednjoškolskom udžbeniku za fiziku na elementaran način obradio i specijalnu teoriju relativnosti. Pobornik teorije relativnosti bio je i Vladimir Varićak (1865.–1942.), matematičar. On je u ljetnom semestru 1914. godine predavao kolegij *Geometrijska interpretacija teorije relativnosti*, dva sata na tjedan. U razdoblju od 1910. do 1936. Varićak je objavio 26 znanstvenih radova o teoriji relativnosti – o analogiji između teorije relativnosti, optičkim pojavama i o neeuklidskoj geometriji Lobačevskog (od toga dvanaest njih do 1916.). Einsteinov pobornik Fran Mihletić (1876.–1922.), fizičar, napisao je tri rada u vezi s teorijom relativnosti. Zdenka Makanec (1894.–1971.), matematičarka, napisala je zapažen rad o relativnosti.

---

[1] Autor je asistent na Zavodu za povijest i filozofiju znanosti Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti; e-mail: bhanzek@hazu.hr.

Važan događaj zbio se 6. 11. 1921. kada je u Hrvatskom prirodoslovnom društvu u Zagrebu utemeljena fizikalno-kemijska sekcija. Tada su za njezine pročelnike izabrani dr. Stanko Hondl, uvjereni pobornik teorije relativnosti, i uvjereni protivnik teorije relativnosti dr. Ivan Plotnikov. Već četiri dana nakon toga sekcija je održala i kolokvij – *Diskusija o temeljnim principima Einsteinove teorije relativnosti i Wienerovoj apsolutnoj teoriji*. U diskusiji su sudjelovali Stanko Hondl, Oton Kučera (veliki zagovornik teorije etera), Stjepan Mohorovičić (najljući znanstveni protivnik Einsteina), Wieser i Franjo Brössler.

Franjo Brössler (1893.–1953.) bio je po zvanju kemičar, a po zanimanju dobavljač kemijskih uređaja za sveučilišnu nastavu. Napisao je i afirmativni rad o teoriji relativnosti. Stjepan Szavitz Nossan (1894.–1915.) bio je inženjer građevine, koji je završio ETH u Zürichu. Napisao je popularan rad u kojem podupire Einsteina. Einsteinov pobornik Josip Goldberg (1885.–1960.), geofizičar, napisao je četiri rada o teoriji relativnosti. Godine 1923. objavio je dr. Vladimir Vranić (1896.–1976.) esej "*Od Newtona do Einsteina*", u kojem je istaknuo da je glavna zasluga Einsteina da nas izvlači iz naših mikrokozmičkih prilika i daje nam naslutiti po kojemu se zakonu svijet kreće. Vladimir Vrkljan (1894.–1974.) najsvestraniji je znanstveni sljedbenik Einsteina, i to u pogledu teorije relativnosti, i u pogledu kvantne teorije i molekularno-kinetičke teorije. Napisao je šest radova o relativnosti. On je 24. 04. 1932. na znanstveno-popularnom tečaju zagrebačkog radija održao predavanje "*Svemir u vidu moderne fizike*". Tu je govorio o specijalnoj i općoj teoriji relativnosti. Vrkljan je na Mudroslovnom fakultetu hrvatskog Sveučilišta u zimskom semestru 1943. predavao kolegij *Teoretska fizika (specijalna teorija relativnosti)* dva sata na tjedan, a držao je i seminarske vježbe iz racionalne mehanike i teorijske fizike. Pobornik Einsteina Stjepan Škreb (1879.–1952.), geofizičar, napisao je tri rada o teoriji relativnosti. Vatroslav Lopašić (1911.–2003.) bio je najvjerniji sljedbenik Einstenove teorije relativnosti. Prihvatio ju je od 1931., kada je slušao predavanje prof. Varićaka na fakultetu, *Geometrija u teoriji relativnosti.* U knjizi *Predavanja iz fizike (elektromagnetsko polje)*, koja je objavljena 1986. Lopašić opisuje Boškovićev pokus s astronomskim dalekozorom napunjenim vodom. Daje i relativističko tumačenje rezultata tog pokusa. Pobornik Zvonimir Richtmann (1901.–1941.), fizičar, napisao je dva rada i održao dva predavanja o relativnosti. Alfred Kurelec (1907.–1970), fizičar, pobornik Einsteina objavio je 1932. opsežan rad u kojem je opisao Einsteinovu teoriju relativnosti i njenu matematičku interpretaciju koju je dao Minkowski. Dao je i kratak osvrt na općeu teoriju relativnosti. Rikard Podhorsky (1902.–1994.), kemičar, objavio je izvještaj o Richtmannovu predavanju. Tomislav Pinter (1899.–1980.), kemičar, napisao je dva rada, u kojima je istaknuo značenje Einsteina za fiziku, ali i filozofiju. Ivan Supek (1915.), fizičar, u svojoj je knjizi iz 1946. opisao na znanstvenopopularan način Einsteinovu teoriju relativnosti. Osim toga, Supek je objavio i sveučilišni udžbenik fizike, 1951., u kojem piše o teoriji relativnosti, ali je za razumijevanje potrebno poznavanje više matematike. U gimnazijskom udžbeniku fizike pobornika Marina Katalinića (1887.–1959.) i Dragutina Mayera (1912.), istaknuto je da je Albert Einstein znameniti teorijski fizičar koji je stvorio teoriju relativnosti (1905.–1916.) i razvio kvantnu teoriju svjetlosti. Mira Hercigonja (1897.–1988.), matematičarka, pobornica, u svojoj je knjizi istakla ulogu prof. Varićaka i primjenu geometrije Lobačevskoga na specijalnu teoriju relativnosti. U toj knjizi posebno je istaknula da je Lobačevskij bio prvi koji je naglasio da je metrika prostora posljedica fizikalnih zbivanja. Danilo Blanuša (1903.–1987.), fizičar, preveo je knjigu Maxa Borna: *Einsteinova teorija relativnosti*, (prijevod iz 1948.). Napisao je rad o teoriji relativnosti te i nekrolog za Einsteina. Zlatko Janković (1916.–1987.), fizičar, objavio je 1950. godine disertaciju: *Prilog izgradnji*

mehanike (odnos klasične mehanike i specijalne teorije relativnosti). On tamo daje, pozivajući se na mnoge radove raznih autora, znanstveno utemeljen, vrijedan i originalan prilog izgradnji mehanike, i to počev od Newtona.

Stjepan Mohorovičić (1890.–1980.), fizičar, Einsteinov protivnik, napisao je od 1916. do 1939. čak 29 radova koji se odnose na teoriju relativnosti. Učinio je silan napor kako bi osporio Einsteinovu teoriju relativnosti i razvio teoriju etera kao i opću fizikalnu teoriju. U mnogim svojim radovima tumačio je da se mnogi eksperimenti u svezi s teorijom ralativnosti mogu razjasniti i u okviru teorije etera. To se naročito odnosilo na negativan rezultat Michelson-Morleyeva pokusa. I u pokusima u optici Mohorovičić je pokazao da Einsteinova teorija nije jedino moguće razrješenje. Ivan Plotnikov (1878.–1955.), protivnik, uporno je pobijao Einsteinovu teoriju relativnosti tako da je dovodio mnoge predavače iz Hrvatske, i iz Njemačke, kako bi u potpunosti pobijali Einsteinovu teoriju relativnosti. Sam je napisao mnoge radove u kojima se naročito obrušio na Einsteinovu teoriju fotoelektričnog efekta. Oton Kučera (1857.–1931.), protivnik, na mnogim je predavanjima pobijao teoriju relativnosti i isticao teoriju etera. Milorad Z. Jovičić (1868.–1937.), kemičar, u svojem je radu iz 1922. godine na čak 44 stranice, napisao opširnu kritiku Einsteinove teorije relativnosti. U radu piše da postoje protivnici, neutralni (koji usvajaju specijalnu teoriju relativnosti, a opću ne smatraju dokazanom nego samo mogućom) i pobornici teorije relativnosti. Svoje odbijanje teorije relativnosti temeljio je na činjenici da same matematičke osnove ne mogu biti valjani dokaz za teoriju relativnosti. Kao kemičar potvrđivao je to i na primjeru matematike i kemije. Isticao je da se kemijske i fizikalne činjenice ne moraju matematički objašnjavati te da se sve kemijske promjene daju izraziti kemijskim formulama matematičkog karaktera, ali ne i obrnuto. Osporavatelj teorije relativnosti bio je i kemičar Mladen Hegedušić (1899.–1995.). On je napisao 1953. rad o prisustvu mase u nuklearnim procesima i sastav nukleona i u njemu istaknuo da se ne poziva na nezaobilaznog Einsteina niti na bilo kojeg drugog fizičara ili kemičara. Protivnik Drago Stiegler (1919.), fizičar, napisao je tri rada u kojima teoriju relativnosti iskazuje pomoću klasične fizike. U radovima iskazuje kako se iz klasičnih principa Fermata i Maupertuis-Langrangea mogu izvesti temeljni zakoni Einsteinove specijalne teorije relativnosti. Također je pokazao da se princip konstantnosti brzine svjetlosti, a time i specijalna teorija relativnosti, može izvesti iz klasične fizike i to nezavisno od Michelson-Morleyeva pokusa. Interesantno je primijetiti da je Stieglera pri objavljivanju radova podupirao nobelovac Lois de Broglie. Einsteinov protivnik bio je i Srđan Škarić (1921.) koji je napisao rad kojim nije podupirao teoriju relativnosti već je izveo relacije iz kojih se mogu izvesti svi rezultati specijalne teorije relativnosti. Mi danas znamo da su svi pokušaji Einsteinovih protivnika naročito ostali uzaludni kada su eksperimentalni rezultati iz relativističke dinamike i kvantne elektrodinamike potvrdili Einsteinovu teoriju relativnosti.

Treba se sjetiti toga da znanstvenici uvijek vole ekstrapolirati. To je i duboko istinito. Međutim, znanstvenici pritom ne vode računa o slučaju, o nepredvidivosti, o napretku. Prema stupnju današnjeg znanja znanstvenici već govore što smatraju da je danas istinito. Vremenu prepuštaju da učini ostalo. Na taj način prebacuju svoju odgovornost u budućnost, na nove pokuse koji će biti valjani dokaz tvrdnji. No svi, znanstvenici i oni drugi, odgovorni su pred javnošću što nisu učinili sve kako bi raspolagali valjanim dokazom što se zapravo dogodilo i kada je postignut najveći mogući stupanj istinitosti tvrdnji. U ime iznošenja podataka o onome što se zapravo dogodilo, ovaj rad služi za to da svjedoči o takvim rukavcima tijeka povijesti znanosti.



Hrvatski matematičari (uz 100. obljetnicu rođenja Vilima Fellera)

Neven Bogdanić, Split

Ne samo moćno oružje u borbi za opstanak, matematika je simbol naše intelektualne snage i jamstvo, da će se ljudski duh vazda boriti za uzvišene ciljeve.

Danilo Blanuša

U današnje vrijeme kad su sve ljudske djelatnosti pod dominacijom informatike i robotike, kad automati i svekoliki digitalni uređaji rade na temelju matematičkih ideja, pravila i zakona, kad je zapravo sve oko nas matematizirano, čovjek se pita: Kolika je to moć matematike i matematičara? Jesmo li i mi sudionici tog općeg napretka matematike? Da li su hrvatski matematičari išta doprinijeli razvoju matematičkih postupaka i metoda u njezinom hôdu tijekom proteklih stoljeća?

Istaknuti pojedinci koji su stvarali matematiku, nazvanu *kraljicom znanosti*, pojavljivali su se najviše kod razvijenijih i velikih naroda. Ali su se javljali i u manjim sredinama.

Dubrovački matematičari

Takvi su svakako bili u prošlosti mnogi naši poznati znanstvenici: iz Dubrovnika, koji su se uz matematiku bavili i drugim znanostima. Spomenut ćemo neke od njih.

Dubrovčanin **Marin Getaldić** (1568. – 1626.), koji se rodio i umro u Dubrovniku, hrvatski je matematičar i fizičar, poznat po primjeni algebre u geometriji i radovima iz područja geometrijske optike (Djelo: *De resolutione et compositione mathematica* (*O matematičkoj analizi i sintezi*), Rim – 1630.). Razradio je ideje i metode Euklidove, Arhimedove i Apolonijeve geometrije. Bavio se i praktičnom optikom. (Getaldićevo ogledalo se nalazi u National Maritime Museumu u Greenwichu.) Na svom studijskom putovanju po zapadnoj Europi upoznao je mnoge znanstvene velikane onoga vremena; recimo, najvećeg matematičara 16. st. Vìetea, čiju je novu simboličku algebru prihvatio. Dopisivao se s Galileom i bio je jedan od najzapaženijih učenjaka prvih desetljeća 17. st.

Stjepan Gradić (1613. – 1683.) – rođen u Dubrovniku (umro u Rimu), studirao je u Bologni i Rimu, gdje je proveo veći dio života. Ogromno je područje njegova zanimanja i djelovanja, od pjesništva i diplomacije do filozofije i prirodnih nauka, posebno matematike i mehanike. Sudjelovao je u svim znanstvenim zbivanjima svojega doba u Rimu. U Vatikanskoj knjižnici čuva se njegov vrijedan rukopis o geometriji te o mnogim pitanjima iz fizike i astronomije. U Amsterdamu je god. 1680. objavio djelo: *Dissertationes physico-mathematicae quatuer* (*Četiri fizičko-matematičke rasprave*). Bavio se problemima gibanja (slobodni pad). Kao respektabilni učenjak sudjelovao je u ključnim diskusijama prednjutnovskog i postgalilejevskog doba.

Petar Damjan Ohmučević rodio se u Slanom kraj Dubrovnika. Godina rođenja i smrti ovoga dubrovačkog pomorskog pisca i matematičara nije poznata, ali se zna da je u službu Dubrovačke Republike stupio 1644. god. kao učitelj matematike, da bi 1656. otišao u Napulj. Napisao je na talijanskom jeziku dva djela iz područja matematike, koja su ostala u rukopisu. (Pohranjena su u Toledu, Španjolska.) To su: *Succiuto discorso di geometria pratica* (*Kratki razgovor o praktičnoj geometriji*) i *Trattato generale dei numeri rotti...* (*Opća pravila o razlomcima...*) u kojemu se nalazi originalna i vrlo točna približna metoda računanja obujma broda. Njegovi rezultati nisu puno zaostajali za radovima nekih, kasnije svjetski poznatih, matematičara u 17. st., koji su se bavili sličnim problemima.

Ruđer Bošković (1711. – 1787.), također rođen u Dubrovniku (umro u Milanu), bio je univerzalni znanstvenik svjetske reputacije; osim matematikom (Rad: *De natura et usu Infinitorum & Infinite parvorum* (*O prirodi i uporabi beskonačno velikih i beskonačno malih veličina*), Rim – 1741.; djela: *Elementorum Universae Matheseos* (*Elementi sveukupne matematike*) – gdje je majstorski izložio teoriju konusnih presjeka, i *Decontinuitatis lege* (*O zakonu neprekinutosti*), Rim – 1754.), bavio se mehanikom, astronomijom, optikom, filozofijom, a uz to je bio i arhitekt, pjesnik, i diplomat.

Bošković je s petnaest godina postao učenik isusovačkog kolegija u Rimu. Među ostalim, bio je profesor matematičkih znanosti na svečilištu u Paviji i na Rimskom kolegiju, profesor optike i astronomije u Milanu, direktor optike za pomorsvo u Parizu. Vodio je ozbiljne naučne polemike s najistaknutijim znanstvenicima svoga vremena, posebno s D'Alembertom i Laplaceom. Smatrao je da postoji apsolutni prostor, ali ga se ne može spoznati; držao je da postoji relativni zvjezdani prostor u kojemu vrijedi Newtonova fizika. Svojim cjelokupnim radom, osobito teorijom jedinstvene sile i teorijom prirodne filozofije doprinio je suvremenijoj spoznaji fizičkih fenomena. Pisao je na latinskom, francuskom i talijanskom jeziku, ne zanemarujući svoj materinski jezik.

Ovaj isusovac posebne učenosti, genijalni um, gotovo neograničene snage duha, istaknuti prethodnik moderne fizikalne nauke, utemeljitelj dinamičke atomistike, kritičar skolastičkih i metafizičkih zabluda na području prirodnih znanosti (Djelo: *Philosophiae naturalis theoria* (*Teorija prirodne filozofije*), Beč – 1758. i dr.), pripada odabranoj plejadi među sto najznačajnijih umnika, koje je čovječanstvo podarilo matematici. (Prema kategorizaciji *Sto eminentnih matematičara* objavljenoj god. 1962. u br. 7 časopisa "The Mathematics Teacher" ime našeg velikana nalazi se na 44. mjestu, čak izravno ispred glasovitog G. Galileia.)

Čuveni pjesnik na latinskom jeziku **Benedikt Stay–Stojković** (1714. – 1801.), rođen u Dubrovniku a umro u Rimu; premda je završio teologiju i zaredio se, bavio se matematikom i filozofijom. Ruđer Bošković ga je uputio u Newtonovu nauku, pa je Stay napisao djelo: *Philosophiae recentioris versibus traditae libri decem* (*Deset knjiga novije filozofije iznesene u stihovima*), objavljeno u Rimu tijekom druge polovice 18. st. – uz Boškovićeve komentare. "Ima odličnu glavu za matematiku", kaže Bošković. Benedikt Stay u hrvatskoj povijesti matematike, odnosno znanosti, ostaje kao jedan od najistaknutijih filozofa matematike i fizike.

Stariji hrvatski matematičari

Mnogobrojna nastojanja da se kod nas u 18. st. i još ranije napiše ili objavi nešto vrijedno iz područja matematike, odnosno da se postigne neki uspjeh u matematici, vezana su uz mnoštvo radišnih i obdarenih ljudi, među kojima treba osobito istaknuti sljedeća imena:

Federik Grisogono (Zadar, 1472. – Zadar, 1538.), najistaknutiji hrvatski znanstvenik krajem srednjovjekovlja, titulu doktora filozofije i matematike stekao je 1507. u Padovi, gdje je ostao u svojstvu profesora matematike i astronomije. Iste godine u Veneciji objavljuje djelo: *Speculum astronomicum...* (*Astronomsko zrcalo...*) u kojemu su sustavno obrađena četiri predmeta kvadrivija: geometrija, aritmetika, astrologija i glazba, s najzanimljivijim poglavljem posvećenim usporednim pravcima.

Franjo Petrišević (Cres, 1529. – Rim, 1597.) – neoplatonovac svjetskog značaja, istakao se u matematici, astronomiji i filozofiji. Uz svoje glavno djelo: *Nova de universis philosophia* (*Nova sveopća filozofija*), 1591. objavio je nekoliko matematičkih knjiga (*Della nouva geometria* (*O novoj geometriji*), 1587. i dr.) u kojima raspravlja o pojmu točke, pitanjima prostora, neprekinutosti, beskonačnosti...

Gradišćanski Hrvat, isusovac **Ivan Horvat** (Kiseg, 1732. – Pešta, 1799.), bavio se matematikom i fizikom. Pored niza udžbenika iz fizike, napisao je udžbenik: *Elementa matheseos* (*Elementi matematike*), Trnava, 1772.

Premda je **Ivan Paskvić** (Virovitica, 1753. – Beč, 1829.) završio teologiju, bavio se matematikom i astronomijom te bio izvrstan profesor više matematike. Dopisivao se s C. F. Gaussom. Objavio je nekoliko istaknutih djela; naročito spominjemo: *Anfangsgründe der gesammten Mathematik* (*Osnove cjelokupne teorijske matematike*), Beč, 1812.–1813.

Mijo Šilobod Bolšić je god. 1758. u Zagrebu tiskao prvi matematički udžbenik na hrvatskom jeziku, naslova *Arithmetika Horvatszka*.

Profesor matematike, **Franjo Klohammer** (Basin, 1755. – Zagreb, 1831.), za svoje studente je u Zagrebu 1801. objavio knjigu: *Theoria aequationum primi et secundi gradis...* (*Teorija jednadžbi prvoga i drugoga stupnja...*)

Franjevac **Ignjat Martinović** (Pešta, 1755. – Pešta 1795.) bavio se matematikom i fizikom. Fiziku je predavao na sveučilištu u Lavovu. God. 1780. napisao je djelo o jednadžbama svih stupnjeva. (Kao jakobinac, u Beču je osuđen na smrt i pogubljen u Pešti.)

Mirko Danijel Bogdanić (Virovitica, 1762. – Budim, 1802.) bio je matematičar i astronom, a bavio se i poviješću. Njegova je disertacija, matematičko-astronomskog sadržaja, bila nagrađena. Premda je predavao višu matematiku, istakao se svojim teorijskim radom i praktičnim istraživanjem u astronomiji. Napisao je više djela iz astronomije, ali nam je iz matematike ostavio svoje poznate *Formulae pro spatiis rectilineis...* (*Formule za pravocrtne likove...*), 1786. Bogdanić je svojim radovima pridonio bogaćenju hrvatskog znanstvenog nasljeđa.

Profesor matematike u osječkoj gimnaziji i na Sveučilištu u Pešti – **Josip Wolfstein** (Karlovac, 1776. – Pešta, 1859.), objavio je više matematičkih priručnika: *Introductio in mathesim puram* (*Uvod u čistu matematiku*), 1830.–1833. i drugo.

Šimun Čučić (Pećno u Žumberku, 1784. – Pećno u Žumberku, 1828.) – profesor matematike i filozofije na Zagrebačkoj akademiji, objavio je u Beču 1816. knjigu *Mathesis* (*Matematika*). Svoja izlaganja započinje općim algebarskim izrazima, iznosi dalje definicije koeficijenata, eksponenata, monoma, binoma... Na kraju završava s beskonačnim nizovima i logaritmima.

Vatroslav Bertić je kao matematičar djelovao sredinom 19. st. šaljući u Hrvatsku svoje radove iz Budima. God. 1846. u Danici Ilirskoj objavio je *Nješto o matematici*, rad u kojemu razmatra matematiku kao jedan od temelja kulturnog obrazovanja. U radu *Književna vijest*, objavljenom iste godine, govori o važnosti matematike (Bertić: *Nema*

narodnog blagostanja bez matematike.) i potrebi predavanja matematike i pisanja knjiga na hrvatskom jeziku. U Pešti je 1847. objavio knjigu: *Samouka pokus prvi*. U njegovim izlaganjima naziru se implicite mnogi elementi matematičke logike.

Nautičar, astronom i matematičar – **Eugen Đelčić** (Kotor, 1854. – Beč, 1915.), predavao je nautiku i matematiku u raznim školama. Pisao je na njemačkom i talijanskom jeziku, a svoje radove objavljivao u Austriji, Italiji i Njemačkoj. Iako je njegovo stručno i znanstveno zanimanje bilo stalno vezano za probleme nautike i astronomije, tiskao je 1882. na njemačkom jeziku posebnu studiju o otkriću analitičke geometrije s obzirom na djelo Marina Getaldića. Time je puno doprinio njegovom upoznavanju kao matematičara u nas i u inozemstvu.

David Segen (Zagreb, 1859. – Zagreb, 1927.) je matematičar koji je nakon završetka studija u Beču radio jedno vrijeme kao profesor na zagrebačkoj realci. Doktorirao je u Zagrebu 1889. na temi iz teorije ravninskih krivulja. To je bila prva odbranjena disertacija iz matematičkih znanosti na Sveučilištu u Zagrebu, na kojemu je Segen predavao matematiku i nacrtnu geometriju. Svoja je istraživanja bio usmjerio na sintetičku geometriju. Ostavio nam je pet znanstvenih djela i četiri stručna rada.

Albin Nađ (Trogir, 1866. – Taranto, 1901.), hrvatski matematičar i filozof, završio je studij u Beču 1890., kad je doktorirao s disertacijom *Über Anwendungen der Mathematik auf die Logik* (*O primjeni matematike na logiku*) koju je sljedeće godine objavio u Napulju pod naslovom: *Fondamenti del calcolo logico* (*Temelji logičkog računa*). Proučavao je logiku, posebice interpretaciju pojmova pomoću klasa i izvođenje logičkih kao skupovnih operacija. Poznati talijanski matematičar i logičar G. Peano potvrdio je važnost njegovih istraživanja u logici. Spomenimo relevantna Nađova djela: *Principi di logica* (*Principi logike*) i *Lo stato attuale ed i progressi della logica* (*Aktualno stanje i napretci logike*).

Suvremeni hrvatski matematičari

Korijeni matematike u Hrvatskoj počinju jačati obnovom Sveučilišta u Zagrebu 1874., kada je na Mudroslovnom fakultetu osnovana katedra za matematiku i kad je u Zagreb iz Praga došao **Karel Zahradnik** (Litomyšl u Češkoj, 1848. – Brno, 1916.); prvi profesor matematike, koji je tokom 23 godine bio nositelj nastave matematike i znanstvenog rada u matematici na Sveučilištu te odgojio niz naših dobrih matematičara. Njegov plodni znanstveni rad (103 publikacije) odnosi se ponajprije na teoriju algebarskih krivulja u ravnini. Mnogi od vrsnih Zahradnikovih nasljednika u prvim desetljećima dvadesetoga stoljeća iskazali su se svojim pedagoškim i istraživačkim radom, napose: **Vladimir Varičak** (Švica kraj Otočca, 1865. – Zagreb, 1942.), **Stjepan Bohniček** (Vinkovci, 1872. – Zagreb, 1956.), **Juraj Majcen** (Zagreb, 1875. – Zagreb, 1924.) i **Marije Kiseljak** (Rijeka, 1883. – Zagreb, 1947.); kasnije: **Stjepan Škreblin** (Pregrada, 1888. – Zagreb, 1982.), **Rudolf Cesarec** (Zagreb, 1889. – Zagreb, 1972.), **Željko Marković** (Slavonska Požega, 1889. – Opatija, 1974.), **Vladimir Vrkljan** (Orehovec kraj Križevaca, 1894. – Zagreb, 1974.), **Juraj Justinijanović** (Stari Grad na Hvaru, 1895. – Zagreb, 1965.), **Vladimir Vranić** (Zagreb, 1896. – Zagreb, 1976.), **Vilko Niče** (Grubišno Polje, 1902. – Zagreb, 1987.), **Danilo Blanuša** (Osijek, 1903. – Zagreb, 1987.), **Miljenko Sevdić** (Sremski Karlovci, 1904. – Zagreb, 1978.), **Đuro Kurepa** (Majske Poljane kraj Gline, 1907. – Beograd, 1993.), **Stanko Bilinski** (Našice, 1909. – Varaždin, 1998.), **Miljenko Vučkić** (Osijek, 1911. – Zagreb, 1981.), **Radovan Vernić** (Bihać, 1914. – Zagreb, 1958.), **Zlatko Janković** (Varaždin, 1916. – Zagreb, 1987.), **Pavle Papić** (Antofagasta u Čileu, 1919. - Zagreb, 2005.), **Viktor Sedmak** (Karlovac, 1920. – Zagreb, 1979.), **Rajko Draščić** (Buzet u Istri, 1923. – Zagreb, 1972.)...

Navedeni matematičari, od kojih su većina bili sveučilišni profesori i akademici, doprinijeli su općem razvoju matematike, baveći se – uz edukativni rad – pojedinim granama ove znanosti. U nemogućnosti da se ovdje, makar ukratko, ekspliciraju rezultati njihova rada, a cijeneći zalaganja svih njih, navest ćemo tek neka njihova ostvarenja. Recimo:

Vladimir Varičak, najistaknutiji matematičar u Hrvatskoj između dva svjetska rata, bavio se algebarskim krivuljama, izučavanjem života i djela R. Boškovića, te uspješno istraživao interpretaciju specijalne teorije relativnosti u prostoru Lobačevskoga. *Ne samo što su formule teorije relativnosti bitno jednostavnije ako se izraze terminologijom neeuklidske geometrije, već dobivaju i geometrijsku interpretaciju, koja je posve analogna interpretaciji klasične teorije u euklidskoj geometriji*, konstatirao je Varičak 1910.

Juraj Majcen je proučavao četverodimenzionalne prostore, gdje je postigao značajne rezultate. Ovaj pokretač modernih pogleda u matematici kod nas, rekao je: *Opravdana je geometrija s više dimenzija, ma kako ona bila apstraktna i ma koliko se činila hipotetička sva ona vrijednost koja iz nje izlazi.*

Premda je glavna domena *Kiseljakova* stvaranja bila algebra i teorija brojeva, kao izvrstan matematičar bio je u stanju predavati višu analizu i diferencijalnu geometriju, čak i kartografiju. Svoje radove je objavljivao u Nastavnom vjesniku i u inozemnim časopisima. Evo nekih od tih radova: *Über einen geometrischen Satz von Dirichlet* (*O jednom geometrijskom stavu Dirichleta*), 1907., *O Euklidovom algoritmu*, 1915., *Aritmetičko-algebarski problemi iz teorije izbrojivih vjerojatnosti*, 1918... (Djelo: *Nauk o skupovima*, u rukopisu.)

Stjepan Škreblin, profesor gimnazije i Više pedagoške škole u Zagrebu, radio je dosta na reformi nastave matematike, naglašavajući važnost pojma funkcije, grafičkog prikazivanja i potrebu oslobađanja nastave supremacije euklidske metode. Sâm ili u koautorstvu objavio je preko 150 izdanja srednjoškolskih udžbenika i priručnika te napisao mnoštvo stručnih radova. Njegov *Infinitezimalni račun* prihvaćen je u ondašnjoj državi kao izvanredno dobar udžbenik. Ovaj najplodniji hrvatski pisac srednjoškolskih udžbenika i jedan od najistaknutijih naših metodičara matematike primio je za svoj rad mnoge nagrade.

Na usavršavanju u Berlinu i Parizu *Rudolf Cesarec* se upoznao s novim metodama i idejama moderne diferencijalne geometrije. U neeuklidskoj geometriji i teoriji algebarskih krivulja došao je do zanimljivih rezultata. (Udžbenici: *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja i projektivna geometrija*.)

Željko Marković, koji se bavio poviješću i filozofijom matematike, zapažen je po svojim istraživanjima matematike u Platona i Aristotela te djelom o životu i radu R. Boškovića. Napisao je *Uvod u višu analizu* u dva dijela, poznati sveučilišni udžbenik.

Vladimir Vranić, koji je kao mladi stručnjak u Beču stjecao znanje iz aktuarske matematike, zdušno se trudio oko razvoja vjerojatnosti i statistike te numeričke matematike. Bio je nastavnik u redovitoj nastavi i na poslijediplomskim studijima na mnogim zagrebačkim fakultetima. Napisao je preko 130 znanstvenih i stručnih radova te knjiga (*Privredna matematika, vjerojatnost i statistika...*). Izučavao je primjenu dualiteta i nomografskih metoda u teoriji linearne i nelinearne korelacije.

Vilko Niče je cijeli svoj radni vijek proveo predavajući na tehničkim fakultetima u Zagrebu. Svoj znanstveni rad usmjerio je na područje geometrije; gotovo isključivo baveći se projektivnom geometrijom. (Radovi mu se odnose na krivulje, plohe, kongruencije i komplekse.). U tomu je pokazao veliku kreativnost (72 rada) i originalnost, koja mu je donijela ugled u zemlji i inozemstvu. Objavio je dva značajna visokoškolska udžbenika: *Uvod u sintetičku geometriju*, 1956. i *Deskriptivna geometrija*, 1979.

Osim što se bavio nekim primjenama, *Danilo Blanuša* nam je ostavio vrijedno (nedovršeno) djelo *Viša matematika* u četiri opsežne knjige. U znanstvenim istraživanjima

(izometrička smještavanja, teorija grafova) postigao je također zapažene rezultate ("Blanuša's Snark").

Đuro Kurepa, koji je doktorirao na Sorboni, znanstveno se bavio teorijom skupova, algebrom, teorijom brojeva, topologijom i nastavom matematike. Uspostavio je vezu između teorije skupova i poznatog Suslinova problema. Napisao je *Teoriju skupova* – originalni udžbenik koji je odigrao važnu ulogu u razvoju suvremene matematike u Hrvatskoj, te *Višu algebru* u dva toma.

Erudit na području matematike, bibliofil i enciklopedist, *Miljenko Vučkić* se u nastavnom radu odlikovao izvanrednim poznavanjem metodike i didaktike. Napisao je i objavio više znanstvenih i stručnih radova: *Poncelet i teorija najbolje aproksimacije* (1951.), *Nastavni i znanstveni rad na području matematičkih znanosti na Mudroslovnom, Filozofskom i Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u razdoblju* 1876. – 1976. (1977.) i drugo. Ovaj je čovjek, široke matematičke kulture, znanstveno i s puno pedagoško-metodičkog smisla izlagao svojim studentima povijesne tokove razvoja matematike.

Jedan od najuglednijih hrvatskih matematičara i naš vodeći stručnjak na području opće topologije – *Pavle Papić*, bio je profesor PMF-a u Zagrebu gdje je obnašao mnoge odgovorne stručne i upravne dužnosti. Papićevi znanstveni rezultati (koji se odnose na neke klase 0-dimenzionalnih topoloških prostora, na neprekidne slike uređenih kompakata i kontinuuma i drugo) citirani su od strane niza autora, a spominju se i u više svjetskih monografija. (Objavio je knjigu: *Uvod u teoriju skupova*, 2000.)

Viktor Sedmak, svoja je istraživanja usmjerio na teoriju skupova (posebno na dio koji se odnosi na kombinatorna razmatranja i uređenja) i uspješno je istupao sa svojim znanstvenim i stručnim predavanjima kako na domaćim kongresima i simpozijima tako i na onima u inozemstvu. Objavio je velik broj radova: *Dimenzija djelomično uređenih skupova pridruženih poligonima i poliedrima* (1952.), *Sur quelques propriétés de groupes* (*O nekim osobinama grupa*), 1966. i drugo. U svojoj knjizi *Uvod u algebru* (1962.) na originalan način iznosi neke dokaze i daje vlastita filozofska rasuđivanja.

Radovan Vernić, hrvatski matematičar i astronom, doktorirao je u Zagrebu 1952. disertacijom: *Diskusija Sundmanova rješenja problema triju tijela.* Intezivno je radio na razvoju astrofizike kao profesor zagrebačkoga PMF-a. U ovom profesoru "osobitih i rijetkih sposobnosti" sretno su se spojile oštrina i prodornost istraživačkog rada sa sklonošću za numeričku obradu podataka. Ž. Marković je rekao, da se "ista Vernićeva karakteristika razabire i u njegovim radnjama iz mehanike neba posvećenim problemu triju i više tijela".

Vilim Feller

Ovoj grupi naših matematičara vremenski pripada i **Vilim (William) Feller** (1906.–1970.), rođen u Zagrebu, gdje je na Mudroslovnom fakultetu završio prve dvije godine studija matematike, da bi doktorirao s 20 godina u Göttingenu. Živio je u raznim zapadnoeuropskim gradovima (Kielu, Kopenhagenu, Stockholmu i Lundu). God. 1939. odlazi u SAD. Predaje na poznatim američkim sveučilištima Brown i Cornell, da bi 1950. postao profesor matematike na glasovitom sveučilištu u Princetonu, na kojemu ostaje do smrti. (Umro je u Memorial Hospitalu u New Yorku.) Fellerov opsežni znanstveni opus od 104 rada i 2 knjige značajan je doprinos analizi, geometriji, teoriji mjerenja, funkcionalnoj analizi i diferencijalnim jednadžbama. Njegovi najznačajniji radovi do

1950. odnose se na klasične granične teoreme teorije vjerojatnosti ("Lindeberg-Fellerov uvjet"). Postigao je također respektabilne rezultate u uspostavljanju veze između analize i vjerojatnosti, proučavanju Markovljevih procesa u nekim teorijama, kao teoriji procesa grananja.

Moderna matematička teorija vjerojatnosti može velikim dijelom zahvaliti svoje današnje značenje Felleru, čije će ime ostati trajno vezano uz njezine temelje. ("Fellerovi procesi", "Fellerov eksplozijski test", "Fellerove polugrupe" i drugo.) Njegovo će se ime spominjati ravnopravno uz velikane ove teorije: J. Bernoullija, A. de Moivrea, P. Laplacea, D. Poissona, E. Borela, A. Kolmogorova...

Ovaj je naš, u svijetu poznati, matematičar dobio mnoga odlikovanja i priznanja. Između ostalih, bio je član Nacionalne akademije u Washingtonu, član Američke akademije za umjetnost i znanost u Bostonu, počasni član Kraljevskog statističkog društva u Londonu, za 1969. dobio je najviše priznanje: Nacionalnu medalju za znanost (koju dodjeljuje predsjednik SAD).

Premda je veći dio života proveo u inozemstvu, V. Feller je održavao veze s domovinom i pomagao razvoju matematike u Hrvatskoj.

Današnji hrvatski matematičari

U najnovije vrijeme, što će reći: danas, Hrvatska ima mnogo matematičara. Otkako je 1960./61. započeo na Sveučilištu u Zagrebu poslijediplomski studij iz matematike, stupanj magistra matematike postiglo je više od 250 matematičara, od čega ih je oko stotinu doktoriralo. Među njima je velik broj vrijednih i izrazito talentiranih. Nije običaj da se o živima govore panegirici, ali kažimo da se današnji hrvatski matematičari, pogotovo oni koji rade na visokoškolskim ustanovama, intezivno bave, kako matematičkim sadržajima već ovdje spomenutim tako, recimo: Liejevim grupama i teorijom reprezentacija, zasnivanjem matematike i matematičkom fizikom, kombinatorikom i diskretnom matematikom te drugim matematičkim disciplinama.

No, kao i u drugim zemljama, u Hrvatskoj žive, rade i djeluju matematičari-akademici. Danas (početkom ožujka 2006.) imamo pet hrvatskih matematičara, koji su redoviti članovi HAZU (Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti). Sa zadovoljstvom bilježimo njihova imena (i godinu od koje su redoviti članovi): **Vladimir Devidé** (rođ. 1925. – od 1990.), **Sibe Mardešić** (rođ. 1927. – od 1988.), **Žarko Dadić** (rođ. 1930. – od 1992.), **Josip Pečarić** (rođ. 1948. – od 2000.) i **Marko Tadić** (rođ. 1953. – od 2000.). Neki od ostalih naših matematičara postižu uspjehe u samozataji, dok dio pak marljivijih i najsposobnijih objavljuje učinke vrijedne osobite pozornosti. Nezahvalno je među najboljima izdvajati najbolje; međutim, od živućih hrvatskih matematičara iz niza najzapaženijih ne bismo smjeli izostaviti: **Ibrahima Aganovića** (Zagreb), **Mladena Bestvinu** (Salt Late City, država Utah, SAD), **Jakšu Cvitanića** (Los Angeles, California), **Andreja Dujellu** (Zagreb), **Zvonimira Janka** (Heidelberg, Njemačka), **Andru Mikelića** (Lyon, Francuska), **Rudolfa Scitovskog** (Osijek)...

⋆ ⋆ ⋆

Imamo stoga dovoljno razloga da budemo više nego ponosni na naše matematičare, poglavito na proslavljenoga Ruđera Boškovića. Ne bismo, naravno, smjeli reći da smo narod bez tradicije u matematici. I naši su matematičari, čini se, utkali svoj prilog, makar koliko skroman bio, u razvoj ove drevne znanosti. *Ništa se u svijetu ne gubi, ništa ne propada u ništavilo i ne gubi se ni riječ ni glas ljudi, sve ima svoje mjesto i svoje značenje*, zapisano je u prastaroj knjizi *Zohar*.

Metode faktorizacije

Bernardin Ibrahimpašić, Bihać

Uvod

Cilj faktorizacije prirodnih brojeva je zapisati prirodan broj n u obliku produkta $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, gdje su p_i različiti prosti i α_i prirodni brojevi. Jednostavna i dobro poznata metoda faktorizacije je dijeljenje s prostim brojevima manjim ili jednakim $\sqrt{n}$. Budući da prostih brojeva manjih od $\sqrt{n}$ ima približno $2\sqrt{n}/\ln n$, ova metoda je spora za velike n koji se javljaju, npr. u primjenama u kriptografiji. Međutim, ta metoda je vrlo korisna za brojeve $n < 10^{12}$.

Postoje efikasni testovi određivanja da li je neki prirodan broj prost, a čije je polazište mali Fermatov teorem. Ukoliko prirodan broj n ne prođe neki od testova prostih brojeva, onda je n sigurno složen, ali ti testovi ne daju nam niti jedan netrivijalni faktor od n. Problem pronalaženja prostog faktora za složeni broj n je mnogo teži od samog problema utvrđivanja da li je n prost ili složen. Ovaj problem je vrlo važan za pitanje sigurnosti nekih kriptosustava, kao što je naprimjer RSA. Metode faktorizacije, zavisno od toga da li očekivani broj operacija zavisi samo o veličini broja n ili i o svojstvima prostih faktora od n, dijelimo na opće i specijalne. Neke od specijalnih metoda su Pollardova ρ-metoda, Pollardova $(p-1)$-metoda i Fermatova metoda, dok opće metode uglavnom koriste faktorske baze. U ovom članku ćemo opisati upravo spomenute metode. Prije toga ćemo pokazati kako se polazna metoda dijeljenja s prostim brojevima do $\sqrt{n}$ može poboljšati koristeći informacije o tome koji prosti brojevi uopće dolaze u obzir da budu djelitelji od n.

Teorem 1 (mali Fermatov teorem). *Neka je p prost broj. Tada za svaki cijeli broj b, takav da je $M(b,p) = 1$, vrijedi*

$$b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1}$$

Napomenimo da obrat ovog teorema ne vrijedi, jer p može biti i složen, a da ipak za neki b vrijedi (1).

Primjer 1. Za složen broj $n = 341 = 11 \cdot 31$ postoji cijeli broj b, takav da je $M(b,n) = 1$ i da je $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Za $b = 2$, koji je relativno prost s n, imamo

$$2^{340} = \left(2^{10}\right)^{34} \equiv 1^{34} = 1 \pmod{341},$$

pa je

$$2^{341-1} = 2^{340} \equiv 1 \pmod{341}.$$

Propozicija 1. Neka je b cijeli i n prirodan broj. Tada je

$$b^n - 1 = (b-1)\left(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^2 + b + 1\right).$$

Korolar 1. Neka je b cijeli, a m i n prirodni brojevi. Tada je

$$b^{mn} - 1 = (b^m - 1)\left(b^{m(n-1)} + b^{m(n-2)} + \ldots + b^{2m} + b^m + 1\right).$$

Propozicija 2. Neka je $M(b,n) = 1$, a a i c prirodni brojevi takvi da je $b^a \equiv 1 \pmod{n}$ i $b^c \equiv 1 \pmod{n}$. Ako je $d = M(a,c)$, tada je $b^d \equiv 1 \pmod{n}$.

Dokaz. Koristeći Euklidov algoritam, možemo zapisati d u obliku $ua + vc$, gdje je jedan od brojeva u i v prirodan, a drugi nula ili negativan cijeli broj. Bez smanjenja

općenitosti, možemo pretpostaviti da je $u > 0$ i $v \leqslant 0$. Sada obje strane kongruencije $b^a \equiv 1 \pmod{n}$ potenciramo s u, a drugu kongruenciju $b^c \equiv 1 \pmod{n}$ s v, pa dobivene rezultate pomnožimo. Dobijemo $b^{au+cv} \equiv 1 \pmod{n}$. Kako je $au + cv = d$, tvrdnja je dokazana.

Propozicija 3. Ako prost broj p dijeli $b^n - 1$, tada ili

1. $p | b^d - 1$ za neki netrivijalni djelitelj d od n, ili
2. $p \equiv 1 \pmod{n}$.

Ako je $p > 2$ i n neparan, tada je $p \equiv 1 \pmod{2n}$.

Dokaz. Kako je $b^n \equiv 1 \pmod{p}$, a prema malom Fermatovom teoremu je $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Prema propoziciji 2 to znači $b^d \equiv 1 \pmod{p}$, gdje je $d = M(n, p-1)$. Ako je $d < n$, tada p dijeli $b^d - 1$, za neki netrivijalni djelitelj d od n, pa je 1. slučaj dokazan. Ako je $d = n$, pošto d dijeli $p - 1$, imamo $p \equiv 1 \pmod{n}$. Konačno, ako su p i n oba neparna i n dijeli $p - 1$, tada očito i $2n$ dijeli $p - 1$.

Primjer 2. Faktorizirajmo broj $2^{35} - 1$.

Kako je $35 = 5 \cdot 7$, to $2^{35} - 1$, prema korolaru 1, mora biti djeljivo s $2^5 - 1 = 31$ i $2^7 - 1 = 127$. Kako je $2^{35} - 1 = 34\,359\,738\,367$, imamo

$$\frac{2^{35} - 1}{(2^5 - 1)(2^7 - 1)} = 8\,727\,391.$$

Još nam preostaje faktorizacija broja 8 727 391. Kako je $\lfloor \sqrt{8\,727\,391} \rfloor = 2\,954$, to trebamo ispitati proste brojeve manje ili jednake $2\,954$. Ali, prema propoziciji 3, svaki eventualni sljedeći prosti faktor p od $2^{35} - 1$ mora zadovoljavati kongruenciju $p \equiv 1 \pmod{2 \cdot 35}$, tj. $p \equiv 1 \pmod{70}$, pa zato ispitujemo samo brojeve $71, 211, 281, 421, 491, \ldots$. Odmah dobivamo $8\,727\,391 = 71 \cdot 122\,921$. Kako je $\lfloor \sqrt{122\,921} \rfloor = 350$, to nam preostaje ispitati još samo brojeve 211 i 281, ali nijedan nije prosti faktor od $122\,921$ pa zaključujemo da je $122\,921$ prost broj. Dakle $2^{35} - 1 = 31 \cdot 71 \cdot 127 \cdot 122\,921$.

Pollardova ρ-metoda

Uobičajen zahtjev kod ove metode, koja spada u specijalne metode faktorizacije, je da su prosti faktori od n maleni.

Ukoliko želimo faktorizirati prirodan n, onda se prvo izabere preslikavanje $f : \mathbf{Z}_n^* \longrightarrow \mathbf{Z}_n^*$, gdje je $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, a $\mathbf{Z}_n^* = \{a \in \mathbf{Z}_n : M(a, n) = 1\}$. Jednostavno se uzme polinom f s cjelobrojnim koeficijentima, koji nije linearan niti je bijekcija. Često se uzima $f(x) = x^2 \pm a$, za slučajan a, $0 < a \leqslant n - 3$. Najjednostavnije je za polinom f uzeti $f(x) = x^2 - 1 \pmod{n}$. Odaberimo slučajan x_0, $(0 < x_0 \leqslant n - 1)$, za početak iterativnog procesa $x_{j+1} = f(x_j)$, $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Najčešće se uzima $x_0 = 2$.

Neka je d netrivijalni faktor od n. Želimo naći x_k i x_l, takve da je

$$x_k \equiv x_l \pmod{d} \quad \text{i} \quad x_k \not\equiv x_l \pmod{n}.$$

Međutim, kako d nije unaprijed poznat, računamo $M(x_k - x_l, n)$ sve dok ne dobijemo netrivijalni faktor od n.

Primjer 3. Ilustrirajmo faktorizaciju broja $n = 1387$ Pollardovom ρ-metodom.

Neka je $f(x) = x^2 - 1 \pmod{1\,387}$ i $x_0 = 2$.

Pomoću $f(x)$ dobiva se niz x_i

$$2, 3, 8, 63, 1\,194, \overline{1\,186, 177, 814, 996, 310, 396, 84, 120, 529, 1053, 595, 339}$$

gdje se brojevi ispod crte ciklički ponavljaju.

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
M(x_1 - x_0, n) &= M(3 - 2, 1387) &&= M(1, 1387) &&= 1\\
M(x_2 - x_1, n) &= M(8 - 3, 1387) &&= M(5, 1387) &&= 1\\
M(x_2 - x_0, n) &= M(8 - 2, 1387) &&= M(6, 1387) &&= 1\\
M(x_3 - x_2, n) &= M(63 - 8, 1387) &&= M(55, 1387) &&= 1\\
M(x_3 - x_1, n) &= M(63 - 3, 1387) &&= M(60, 1387) &&= 1\\
M(x_3 - x_0, n) &= M(63 - 2, 1387) &&= M(61, 1387) &&= 1\\
M(x_4 - x_3, n) &= M(1194 - 63, 1387) &&= M(1131, 1387) &&= 1\\
M(x_4 - x_2, n) &= M(1194 - 8, 1387) &&= M(1186, 1387) &&= 1\\
M(x_4 - x_1, n) &= M(1194 - 3, 1387) &&= M(1191, 1387) &&= 1\\
M(x_4 - x_0, n) &= M(1194 - 2, 1387) &&= M(1192, 1387) &&= 1\\
M(x_5 - x_4, n) &= M(1186 - 1194, 1387) &&= M(8, 1387) &&= 1\\
M(x_5 - x_3, n) &= M(1186 - 63, 1387) &&= M(1123, 1387) &&= 1\\
M(x_5 - x_2, n) &= M(1186 - 8, 1387) &&= M(1178, 1387) &&= 19
\end{aligned}$$

dakle, nakon 13 koraka dobijemo da je 19 prosti faktor od $n = 1387 = 19 \cdot 73$.

Kao što vidimo, ovdje za svaki k računamo $k - 1$ puta $M(x_k - x_l, n)$. Ova metoda se može poboljšati Floydovom metodom, tako da za svaki k ispitujemo samo $M(x_k - x_{2k}, n)$. Sada za svaki k samo jednom računamo $M(x_k - x_{2k}, n)$, a pored toga ne moramo računati $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{2k-1}$.

Primjer 4. Poboljšanom metodom, faktorizacija broja $n = 1387$ se dobije nakon samo 3 koraka.

$$\begin{aligned}
M(x_2 - x_1, n) &= M(8 - 3, 1387) &&= M(5, 1387) &&= 1\\
M(x_4 - x_2, n) &= M(1194 - 8, 1387) &&= M(1186, 1387) &&= 1\\
M(x_6 - x_3, n) &= M(177 - 63, 1387) &&= M(114, 1387) &&= 19
\end{aligned}$$

Očekivani broj operacija za Pollardovu ρ-metodu je $O\left(n^{1/4}\ln^2 n\right)$.

Pollardovu ρ-metodu je za 24% ubrzao Richard P. Brent, koji je računao $M(x_{2^n-1} - x_j, n)$, gdje je $2^{n+1} - 2^{n-1} \leqslant j \leqslant 2^{n+1} - 1$, tj. koristio je $x_1 - x_3$, $x_3 - x_6$, $x_3 - x_7$, $x_7 - x_{12}$, $x_7 - x_{13}$, $x_7 - x_{14}$, $x_7 - x_{15}$, $x_{15} - x_{24}$, itd.

Pomoću ove metode Brent i Pollard su 1980. godine faktorizirali osmi Fermatov broj $F_8 = 2^{2^8} + 1 = 1\,238\,926\,361\,552\,897 \cdot p_{63}$, gdje je p_{63} prost broj sa 63 znamenke.

Pollardova $p-1$ metoda

Ova metoda također spada u klasu specijalnih metoda za faktorizaciju. Uvjet koji je ovdje poželjan je da za $n = pq$, gdje su p i q prosti brojevi, svi prosti faktori od $p-1$ manji su od nekog broja B. Treba napomenuti, da što je B veći, vjerojatnost uspješne faktorizacije veća je, ali je vrijeme potrebno za izvršavanje dulje. Inače, očekivani broj operacija za ovu metodu je $O\big(B \cdot \ln B \cdot \ln^2 n + \ln^3 n\big)$.

Za neke B ovo može biti polinomijalan algoritam, ali to je samo u specijalnim slučajevima. U općem slučaju, ova metoda nije puno bolja od običnog dijeljenja prostim brojevima manjim od $\sqrt{n}$.

Pogledajmo sada opis ove metode. Kao što je poznato, prema malom Fermatovom teoremu je $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, za sve cijele brojeve a koji nisu djeljivi s p. To znači da p dijeli $a^k - 1$. Ako $a^k - 1$ nije djeljivo s n, tada je $d = M\left(a^k - 1, n\right)$ netrivijalni djelitelj od n. Kao kandidat za k se uzima produkt svih potencija prostih faktora koje su manji ili jednaki B. Ako nismo uspjeli pronaći faktor od n, onda odaberimo novi B i pokušajmo ponovo. Za a se obično uzima $a = 2$.

Primjer 5. Faktorizirajmo $n = 1\,241\,143$.

Uzmimo $B = 15$. Tada je $k = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 360\,360$.

$$d = M(2^{360\,360} - 1,\ 1\,241\,143),\ M(861\,525, 1\,241\,143) = 547.$$

Dakle, jedan prosti faktor od n je $p = 547$, pa je $n = 1\,241\,143 = 547 \cdot 2\,269$, a kako je i $2\,269$ prost broj, n je faktoriziran.

U slučaju da je $(p-1)/2$ prost broj, ova metoda nije bolja od dijeljenja prostim brojevima manjim od $\sqrt{n}$. Napomenimo da postoji još jedna slična metoda, a to je Williamsova $p+1$ metoda, koja se koristi u slučaju kad je p prosti faktor od n, a $p+1$ nema velike proste faktore.

Fermatova faktorizacija

Ako je cijeli broj n produkt dva bliska cijela broja, onda postoji jednostavna metoda za faktorizaciju broja n. Metoda se zove Fermatova faktorizacija a zasniva se na sljedećoj propoziciji.

Propozicija 4. Neka je n neparan prirodan broj. Tada postoji $1-1$ korespodencija između faktorizacija broja n u obliku $n = pq$, gdje je $0 < q \leqslant p$ i prikaz od n u obliku $n = x^2 - y^2$, gdje su x i y prirodni ili 0. Korespodencija je dana jednadžbama

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2}, \quad p = x + y, \quad q = x - y.$$

Dokaz.

$$n = pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = x^2 - y^2.$$

U slučaju da su p i q bliski, tada je y malen a x je nešto malo veći od $\sqrt{n}$, pa se ispitivanje počne s $x = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$.

Primjer 6. Fermatovom faktorizacijom je jednostavno faktorizirati $n = 970\,171$.

Kako je $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = \lfloor\sqrt{970\,171}\rfloor = 984$, to počinjemo s $x = 984 + 1 = 985$, pa imamo

x	985	986
$\sqrt{x^2 - n}$	$\sqrt{54} \approx 7.35$	$\sqrt{2\,025} = 45$

Dakle, $x = 986$ i $y = 45$, pa je $n = 986^2 - 45^2$, tj. $p = 986 + 45 = 1\,031$ i $q = 986 - 45 = 941$, pa je tražena faktorizacija jednaka $n = 1\,031 \cdot 941$.

Primjer 7. Fermatovu faktorizaciju treba ponekad malo modificirati. Faktorizirajmo broj $n = 141\,467$.

Kako je $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = \lfloor\sqrt{141\,467}\rfloor = 376$, počinje se s $x = 376 + 1 = 377$ i povećava ga za 1 dok se ne faktorizira n. Međutim, kako je $n = 587 \cdot 241$, vrše se provjere za sve $377 \leqslant x \leqslant 414 = \dfrac{587 + 241}{2}$, a to je ukupno 38 provjera za x. Ali, ukoliko se pokuša s $x = \lfloor\sqrt{3n}\rfloor + 1$, dobivamo za početak $x = \lfloor\sqrt{3n}\rfloor + 1 = \lfloor\sqrt{424\,401}\rfloor + 1 = 651 + 1 = 652$. Provjeravajući redom, dobivamo $655^2 - 3 \cdot 141\,467 = 68^2$. Ako se sada izračuna $M(655 - 68, 141\,467) = 587$, imamo $n = 587 \cdot 241$. Ovdje su se izvršile samo 4 provjere za x.

Faktorske baze

Ideja koja je iskorištena u primjeru 7 je dovela do mnogo efikasnijeg algoritma za faktorizaciju. Cilj je naći dva prirodna broja x i y koji zadovoljavaju Legendreovu kongruenciju, tj. takve da je

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{n} \quad \text{i} \quad x \not\equiv \pm y \pmod{n}.$$

Kako je

$$x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y) \equiv 0 \pmod{n},$$

a kako n nije djelitelj ni od $x + y$ ni od $x - y$, slijedi da neki netrivijalni faktor od n, uzmimo p, dijeli $M(x + y, n)$, a drugi faktor $n/p = q$ dijeli $M(x - y, n)$.

Apsolutno najmanji ostatak broja a modulo n je cijeli broj između $-n/2$ i $n/2$ s kojim je a kongruentan; u oznaci $a \bmod n$.

Definicija 1. Skup $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, različitih prostih brojeva, s tim da može biti $p_1 = -1$, zove se **faktorska baza**.

Definicija 2. Kvadrat cijelog broja b je $\mathcal{B}$-**broj** (za dani n), ako se apsolutno najmanji ostatak $b^2 \bmod n$ može zapisati kao produkt brojeva iz $\mathcal{B}$.

Primjer 8. Za dani $n = 4\,171$ i $\mathcal{B} = \{-1, 2, 3, 5\}$ kvadrati brojeva 64 i 65 su $\mathcal{B}$-brojevi, dok kvadrat broja 66 nije.

$$\begin{aligned} 64^2 &\equiv -75 \pmod{4\,171} \qquad & -75 &= -1 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 65^2 &\equiv 54 \pmod{4\,171} & 54 &= 2 \cdot 3^3 \\ 66^2 &\equiv 185 \pmod{4\,171} & 185 &= 5 \cdot 37 \end{aligned}$$

Metode za faktorizaciju, koje koriste faktorske baze, rade na sljedeći način. Prvo se odabere cijeli broj w "srednje" veličine. Ako broj n ima s znamenaka, onda se w odabere tako da približno ima l znamenaka, gdje je

$$s = \left\lfloor \frac{\ln\ n}{\ln\ 2} \right\rfloor + 1 \quad \text{i} \quad l = \left\lfloor \frac{\ln\ w}{\ln\ 2} \right\rfloor + 1.$$

Tako, na primjer, ako n ima 50 nameneka, w se odabere tako da ima 5 ili 6 znamenaka. Zatim se formira faktorska baza $\mathcal{B}$ čiji su elementi -1 i svi prosti brojevi manji ili jednaki w. Neka je $r = |\mathcal{B}|$. Poslije toga se odabere dovoljno brojeva b_i takvih da je apsolutno najmanji ostatak $b_i^2 \bmod n$ moguće napisati kao produkt elemenata iz $\mathcal{B}$. Dovoljno ih je pronaći $|\mathcal{B}| + 1 = r + 1$. Brojeve b_i biramo kao slučajne brojeve manje od n, ili ih biramo u obliku $\lfloor\sqrt{kn}\rfloor$ ili $\lfloor\sqrt{kn}\rfloor + 1$, za prirodan broj k. Sada svaki $b_i^2 \bmod n$ napišemo u obliku produkta elemenata iz $\mathcal{B}$, tj.

$$b_i^2 \bmod n = y_i = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_{ij}}.$$

Nakon toga, za svaki y_i, $(1 \leqslant i \leqslant r+1)$, formiramo vektor $\vec{v}_i \in \mathbf{Z}_2^r$, tj. uređenu r-torku koja se sastoji od nula i jedinica, na način da je komponenta vektora $\vec{v}_i$ na mjestu j, $(1 \leqslant j \leqslant r)$, jednaka 1 ako je α_{ij} neparan, a 0 inače. Zatim nađemo podskup b_i-ova takav da je suma pripadnih $\vec{v}_i$-ova jednaka nulvektoru u $\mathbf{Z}_2^r$. Takav podskup uvijek postoji jer imamo skup od $r+1$ vektora dimenzije r, pa su oni linearno zavisni. Na kraju x dobivamo množenjem odabranih b_i-ova modulo n, a y raspolavljajući potenciju p_i-ova u produktu odgovarajućih y_i-ova modulo n. Tako dobiveni x i y zadovoljavaju kongruenciju $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$. Ako je još $x \not\equiv \pm y \pmod{n}$, onda računajući $M(x+y, n)$ dobijemo netrivijalni faktor od n. U slučaju da je $x \equiv \pm y \pmod{n}$, onda biramo ili novi podskup od odabranih $r+1$ b_i-ova ili biramo novih $r+1$ b_i-ova ili mijenjamo skup $\mathcal{B}$.

Primjer 9. Ilustrirajmo faktorizaciju pomoću faktorske baze na primjeru kada je $n = 2\,041$, $w = 10$.

Imamo $\mathcal{B} = \{-1, 2, 3, 5, 7\}$, pa je $r = 5$. Sada pronađimo $r+1 = 6$ odgovarajućih b_i-ova oblika $\lfloor\sqrt{k \cdot 2\,041}\rfloor$ ili $\lfloor\sqrt{k \cdot 2041}\rfloor + 1$, za prirodan k. Dobijemo

$$\begin{array}{rclcr} b_1 &=& \lfloor\sqrt{2\,041}\rfloor &=& 45 \\ b_2 &=& \lfloor\sqrt{2\,041}\rfloor + 1 &=& 46 \\ b_3 &=& \lfloor\sqrt{2\cdot 2\,041}\rfloor + 1 &=& 64 \\ b_4 &=& \lfloor\sqrt{4\cdot 2\,041}\rfloor &=& 90 \\ b_5 &=& \lfloor\sqrt{5\cdot 2\,041}\rfloor &=& 101 \\ b_6 &=& \lfloor\sqrt{6\cdot 2\,041}\rfloor + 1 &=& 111 \end{array} \qquad \begin{array}{rclclcr} y_1 &=& 45^2 \bmod 2041 &=& -16 &=& -1\cdot 2^4 \\ y_2 &=& 46^2 \bmod 2041 &=& 75 &=& 3\cdot 5^2 \\ y_3 &=& 64^2 \bmod 2041 &=& 14 &=& 2\cdot 7 \\ y_4 &=& 90^2 \bmod 2041 &=& -64 &=& -1\cdot 2^6 \\ y_5 &=& 101^2 \bmod 2041 &=& -4 &=& -1\cdot 2^2 \\ y_6 &=& 111^2 \bmod 2\,041 &=& 75 &=& 3\cdot 5^2 \end{array}$$

Na osnovu rastava od y_i na proste faktore, imamo sljedeće vektore

$$\vec{v}_1 = (1,0,0,0,0) \qquad \vec{v}_2 = (0,0,1,0,0) \qquad \vec{v}_3 = (0,1,0,0,1)$$
$$\vec{v}_4 = (1,0,0,0,0) \qquad \vec{v}_5 = (1,0,0,0,0) \qquad \vec{v}_6 = (0,0,1,0,0)$$

Formirajmo sada tablicu čiji su elementi α_{ij}

b_i	-1	2	3	5	7
45	1	4	–	–	–
46	–	–	1	2	–
64	–	1	–	–	1
90	1	6	–	–	–
101	1	2	–	–	–
111	–	–	1	2	–

Kako u aritmetici modulo 2, zbrajanju vektora $\vec{v}_i$ odgovara zbrajanje redaka u ovoj tablici, za odabir odgovarajućeg podskupa b_i-ova možemo promatrati tablicu. Suma prvog i četvrtog retka jednaka je nulvektoru u $\mathbf{Z}_2^5$, pa je $\{b_1, b_4\}$ jedan odgovarajući podskup b_i-ova, a to su također i $\{b_1, b_5\}$ i $\{b_2, b_6\}$. Pogledajmo slučaj $\{b_1, b_4\}$. Tada je

$$x = b_1 \cdot b_4 \bmod n = 45 \cdot 90 \pmod{2\,041} = -32,$$
$$y = (-1)^{(1+1)/2} \cdot 2^{(4+6)/2} \bmod 2\,041 = (-1)^1 \cdot 2^5 \bmod 2\,041 = -32.$$

Sada je $x^2 \equiv y^2 \bmod 2\,041$ ali i $x \equiv y \bmod 2\,041$, pa nam ovi x i y ne daju netrivijalni faktor od n.

Pogledajmo slučaj $\{b_1, b_5\}$:

$$x = b_1 \cdot b_5 \bmod n = 45 \cdot 101 \bmod 2\,041 = 463.$$
$$y = (-1)^{(1+1)/2} \cdot 2^{(4+2)/2} \bmod 2\,041 = (-1)^1 \cdot 2^3 \bmod 2\,041 = -8.$$

Imamo $463^2 \equiv (-8)^2 \bmod 2\,041$, ali i $463 \not\equiv \pm 8 \pmod{2\,041}$, pa nam ovi x i y daju netrivijalni faktor od n. Daljnjim računanjem se dobiva

$$M(x+y, n) = M(463-8, 2\,041),\ M(455, 2\,041) = 13,$$

pa je jedan netrivijalni faktor od n jednak 13. Tada je $2\,041 = 13 \cdot 157$. Također dobivamo

$$M(x-y, n) = M(463+8, 2\,041),\ M(471, 2\,041) = 157.$$

Ideja ovdje opisane metode, koja zahtijeva $O\left(e^{(1+\varepsilon)\sqrt{\ln n \cdot \ln(\ln n)}}\right)$ operacija, gdje je ε proizvoljno malen, iskorištena je za mnogo efikasnije metode za faktorizaciju, kao što su metode verižnog razlomka, kvadratnog sita i sita polja brojeva, što su danas najefikasnije poznate opće metode za faktorizaciju velikih prirodnih brojeva.

Literatura

[1] J. A. BUCHMANN, *Introduction to Cryptography*, Springer–Verlag, New York, 2001.

[2] R. CRANDALL, C. POMERANCE, *Prime Numbers. A Computational Perspective*, Springer–Verlag, New York, 2002.

[3] A. DUJELLA, *Kriptografija*, PMF–Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu `http://www.math.hr/~duje/kript.html`

[4] C. POMERANCE, *Factoring*, Proceedings in Applied Mathematics, Vol. 42, 27–47, AMS, Providence, 1990.

[5] N. SMART, *Cryptography. An Introduction*, McGraw–Hill, New York, 2002.

[6] J. STILLWELL, *Elements of Number Theory*, Springer–Verlag, New York, 2003.

[7] D. R. STINSON, *Cryptography. Theory and Practice*, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[8] S. Y. YAN, *Number Theory for Computing*, Springer–Verlag, Berlin, 2002.

Matematički dokaz Arhimedovog aksioma poluge

Petar Svirčević[1], *Zagreb*

Sažetak. U ovom članku se iz *Zakona težišta ravnog homogenog štapa* izvodi *Arhimedov zakon poluge*, za koji se stoljećima mislilo da je aksiom; dakle, došlo se do toga da se može uspostaviti nova aksiomatika *klasične statike*.

Odmah na početku moramo raščistiti s nekim terminima, koji su ustaljeni u *klasičnoj mehanici* odnosno u *klasičnoj statici*, a koji nisu možda najkorektniji, tim više što i sama aksiomatika klasične statike može biti drugačije postavljena. Naime genijalni *Arhimed* je, još prije dvadeset tri stoljeća, formulirao zakon do kojeg je došao eksperimentalno, a koji je nezaobilazan u svakidašnjoj praksi i koji se koristi svakog trenutka, gotovo na svakom mjestu u našoj tehničkoj civilizaciji. Taj zakon se zove *Arhimedov zakon poluge*, a bilo bi korektno da se zove *Arhimedov aksiom poluge*, jer nije dokazan, a mi ćemo ga dokazati, dakle radi se o teoremu, kako se naziva u matematici, jer u fizici se neki put i aksiomi i teoremi zajedničkim imenom zovu zakoni, osim kod aksiomatski izgrađene *Newtonove klasične mehanike*, koja je izvedena na osnovu tri dobro nam poznata aksioma. Svakako da je u još nekim područjima fizike uspostavljena aksiomatska izgradnja. Opće je poznato, da kada se neka disciplina izgrađuje aksiomatski, svejedno je da li se radi o matematici, dijelu fizike ili neke druge discipline, moraju biti, što se tiče aksioma, zadovoljeni principi *potpunosti*, *nezavisnosti* i *nekontradiktornosti*. To bi bile osnovne uvodne napomene, što se tiče aksiomatike.

Ako malo bolje promislimo, onda se pitamo što ćemo uzeti za aksiom, koji je jasan, a pomoću kojega će se dokazati navedeni zakon (teorem)? Odgovor je da će dokaz slijediti iz *Aksioma o težištu ravnog homogenog štapa* (*Metoda homogenog štapa*), koji kaže da se težište ravnog homogenog štapa nalazi u njegovom polovištu, a to nam je u potpunosti jasno, dok se to ne može reći za *Arhimedov zakon poluge*, koji kaže da se mase koncentrirane u točkama na krajevima poluge, koja nema svoje mase, odnose obrnuto nego duljine krakova od krajeva prema točki u kojoj je težište. Sada prelazimo na pripreme za razrješenje naše tvrdnje, koja je i u samon naslovu iskazana.

U ovom članku ćemo se najprije podsjetiti, kako se konstruira težište ravninskog trokuta, te konveksnog četverokuta, a slike ćemo crtati uz pomoć programa *The Geometer's Sketchpad*.

Sada ćemo objasniti što je to homogeni poligom bez debljine mase m, naime to bi značilo da se radi o prizmi, čija je površina baze P (površina poligona), duljina visine $h = 0$ (debljina poligona) i $\rho = \infty$ (jednolika gustoća mase), prema tome bi formalno bilo $m = Ph\rho = P \cdot 0 \cdot \infty$, što zbog produkta $0 \cdot \infty$ nije dobra definicija. Da izbjegnemo neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ reći ćemo da je visina prizme, tj. debljina poligona, skoro 0 i označavati ćemo je s h_0, a gustoća je skoro ∞ i označavati ćemo je s ρ_∞, pa je $m = Ph_0\rho_\infty$. Intuitivno je jasno, što s ovakvim formalizmom želimo postići.

Pod pojmom homogenog ravnog štapa smatrat ćemo "dužinu" mase m čija je duljina l, a polumjer r_0 je jednak gotovo nula, ali različit od nule, i gustoća ρ_∞ je gotovo beskonačno velika, ali konačna.

Opće je poznata činjenica, da je težište homogenog štapa u homogenom polju sile teže u polovištu tog štapa, a to znači, da ako bi tu fizikalnu tvorevinu podupri u polovištu, tj. težištu, onda bi ona ostala u ravnoteži. Često se misli, da ako je štap

[1] Autor predaje matematiku na Željezničkoj tehničkoj školi u Zagrebu, e-mail: petar.svircevic.hinet.hr

u ravnoteži tada mora biti horizontalan, kao na slici 1.a); no on može biti trajno i u kosom položaju, kao na slici 1.b), ako ga tako ostavimo, s tim da u točki $P \equiv T$ nema proklizavanja.



Slika 1.

Pređimo sada na trokut čije su "fizikalne" karakteristike već dogovorene. Esperimentalna je činjenica da je težište trokuta u sjecištu njegovih težišnica. No, napomenimo, da se može i strogo matematički dokazati (npr. pomoću vektora), da se sve tri spojnice (težišnice) vrha trokuta i polovišta njemu nasuprotne stranice sijeku u jednoj točki (težištu). Ovim razmatranjem bi opravdali nazive: *pravac nosilac težišnice*, *težišnica* i *težište*. Napokon recimo i to, da su sve presječnice trokuta s pravcem kroz težište također težišnice, sa svojstvima uravnoteženja koja imaju i glavne težišnice, a one se zovu sporedne težišnice; evidentno je da ih ima beskonačno mnogo.

Intuitivno i eksperimentalno nam je jasno da svaki ravninski lik ima težište u svojoj nutrini ili vanjštini. Naglasimo da bi mogli promatrati konveksne i konkavne n-terokute, s time da nećemo stalno naglašavati njihovu homogenost bez debljine, no mi ćemo se za naše potrebe baviti samo četverokutom, ali ćemo imati na umu njegove fizikalne, odnosno statičke, karakteristike.

Zamislimo da je dan koveksni četverokut čiji su vrhovi A_1, A_2, A_3, A_4; a zvat ćemo ga četverkut $A_1A_2A_3A_4$, i neka je on postavljen u ravninski koordinatni sustav, te neka su točke $A_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ desno orijentirane. Ako u tom četverokutu povučemo dijagonale $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$ dobivamo četiri trokuta; i to dva trokuta $A_1A_2A_3$ i $A_3A_4A_1$ koji su, reći ćemo, *srodni po dijagonali* $\overline{A_1A_3}$; i trokuti $A_2A_3A_4$ i $A_4A_1A_2$ koji su *srodni po dijagonali* $\overline{A_2A_4}$. Ovi trokuti imaju težišta $T_{123}, T_{341}, T_{234}, T_{412}$, odnosno ako ih prikažemo pomoću koordinata

$$T_{ijk}\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right), \tag{1}$$

gdje je $i, j, k = 1, 2, 3, 4,\ \ (i \neq j,\ \ i \neq k)$. Dakle imamo samo četiri mogućnosti, jer se radi zapravo o kombinacijama trećeg razreda od četiri elementa.

Podsjetimo se (strogi dokaz se može naći u [3]), da ako je zadan konveksni četverokut $A_1A_2A_3A_4$ desno orijentiranih vrhova; tada težišta $T_{123}, T_{234}, T_{341}, T_{412}$ trokuta $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ čine četverkut $T_{123}T_{234}T_{341}T_{412}$, koji je sličan četverokutu $A_1A_2A_3A_4$, te da se pravci $T_{123}T_{341}$ i $T_{234}T_{412}$, nosioci dijagonala $\overline{T_{123}T_{341}}$ i $\overline{T_{234}T_{412}}$, sijeku u težištu četverokuta $A_1A_2A_3A_4$, dakle težište je $T \equiv T_{123}T_{341} \cap T_{234}T_{412}$.

Sada ćemo dati teorem, koji ćemo iskoristiti kod rješenja našeg problema o Arhimedovom zakonu (teoremu) poluge.

Teorem 1. Za opći konveksni četverokut $A_1A_2A_3A_4$, vrijede ova dva identiteta

$$P(\Delta A_1A_2A_3) \cdot |T_{123}T| = P(\Delta A_3A_4A_1) \cdot |T_{341}T|, \tag{2}$$

$$P(\Delta A_4A_1A_2) \cdot |T_{412}T| = P(\Delta A_2A_3A_4) \cdot |T_{234}T|, \tag{3}$$

koji daju veze između produkta površina trokuta srodnih po dijagonali i udaljenosti njima korespodentnih tešišta i težišta četverokuta.

Uputa za dokaz T1. Najprije recimo nešto o provjeri teorema. Naime, ako u programu *The Geometer's Sketchpad* nacrtamo četverokut s već dogovorenim oznakama, tada se lako dobije da su jednakosti (2) i (3) točne, ali to nije dokaz.

Strogi dokaz navedenih identiteta može se uz dosta ispisa napraviti pomoću analitičke geometrije, ili još jednostavnije ako se upotrijebi program *Maple V*.

Budući nismo dokazivali **T1**, to ćemo strogo dokazati **T2** u kojem je sadržan korolar od **T1**, a odnosi se na *deltoid* kao specijalni četverokut, jer nećemo ništa gubiti na općenitosti što se tiče našeg temeljnog problema.

Definicija 1. Neka su u *ravninskom pravokutnom koordinatnom sustavu* (O, x, y) postavljena dva nedegenerirana trokuta $\Delta B_1B_2B_3$ i $\Delta C_1C_2C_3$ (sl. 2) desno orijentiranih vrhova; koji mogu biti bilo kakvi, a mogu se i samopresijecati, čije su površine

$$P_1 = P(\Delta B_1B_2B_3) > 0, P_2 = P(\Delta C_1C_2C_3) > 0, \tag{4}$$

a težišta su im u različitim točkama T_1, T_2, respektivno, dok su udaljenost i koordinate dane s

$$l = |T_1T_2| > 0, \quad T_1(0, 0), \quad T_2(l, 0).$$

Napomena 1. Ovo specijalno postavljanje težišta u ishodište sustava i na pozitivni dio osi x ništa ne umanjuje općenitost problema, a pojednostavnjuje izračunavanje.

Teorem 2. Uz *D1* postoje preslikavanja (u istom koordinatnom sustavu)

$$f_i : D_i \to K_i \;\; (i = 1, 2), \tag{6}$$

koja imaju svojstva

$$f_1 : \Delta B_1B_2B_3 \to \Delta A_1A_2A_4 \text{ (jednakokračni } \Delta), \tag{7}$$

$$f_2 : \Delta C_1C_2C_3 \to \Delta A_2A_3A_4 \text{ (jednakokračni } \Delta), \tag{8}$$

$$P_1 = P(\Delta B_1B_2B_3) = P(\Delta A_1A_2A_4), \tag{9}$$

$$P_2 = P(\Delta C_1C_2C_3) = P(\Delta A_2A_3A_4), \tag{10}$$

$$f_i : T_i \to T_i, \tag{11}$$

$$(\Delta A_1A_2A_3) \cap (\Delta A_2A_3A_4) = \overline{A_2A_4}. \tag{12}$$

Površina deltoida $A_1A_2A_3A_4$ ima svojstvo

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P_1 + P_2, \tag{13}$$

$$T\left(\frac{P_2}{P_1 + P_2}l, 0\right). \tag{14}$$

Dokaz T2. Ako uvažimo *D1* i ako pogledamo sl. 2, zaključujemo da je dovoljno pokazati da sve koordinate vrhova deltoida možemo izraziti pomoću veličina l, P_1, P_2.

Neka je $a, b, c, d > 0$, tako da su koodinate vrhova deltoida dane s

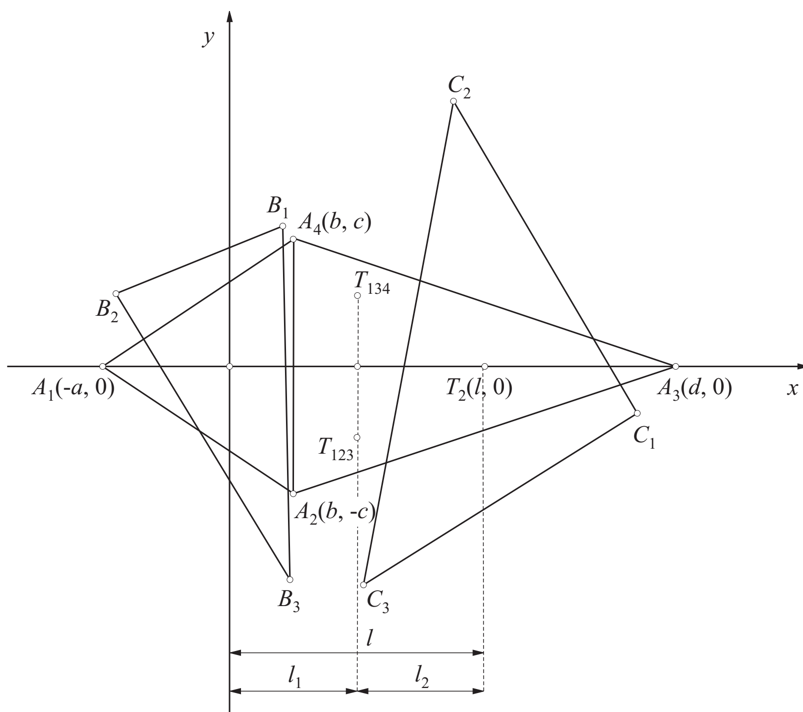
$$A_1(-a, 0),\ \ A_2(b, -c),\ \ A_3(d, 0),\ \ A_4(b, c). \tag{15}$$

Sada ćemo koristiti (1). Težište trokuta $\Delta A_1A_2A_3$ je

$$T_{123}\left(\frac{-a+b+d}{3}, -\frac{c}{3}\right), \tag{16}$$

i analogno za $\Delta A_1A_3A_4$

$$T_{134}\left(\frac{-a+b+d}{3}, \frac{c}{3}\right). \tag{17}$$



Slika 2.

Iz (9), (10) i sl. 2 dobivamo relacije

$$P_1 = (a+b)c, \tag{18}$$

$$P_2 = (d-b)c. \tag{19}$$

Ako primijenimo konstrukciju težišta četverokuta i (11), jasno je da je težište deltoida $A_1A_2A_3A_4$ dano s

$$T \equiv \overline{T_1T_2} \cap \overline{T_{123}T_{134}} \equiv (l_1, 0) \equiv \left(\frac{-a+b+d}{3}, 0\right). \tag{20}$$

Iz sl. 2 se vidi da je

$$O(0,0) \equiv T_1\left(\frac{-a+b+b}{3},0\right), \tag{21}$$

a odatle

$$a = 2b, \tag{22}$$

dok se iz

$$T_2(l,0) \equiv T_1\left(\frac{b+d+b}{3},0\right), \tag{23}$$

dobije da je

$$d = 3l - 2b. \tag{24}$$

Ako (18) podijelimo s (19) iz (22) i (24) slijede relacije

$$a = \frac{2P_1}{P_1+P_2}l,\quad b = \frac{P_1}{P_1+P_2}l,\quad c = \frac{P_1+P_2}{3l},\quad d = \frac{P_1+3P_2}{P_1+P_2}l. \tag{25}$$

Iz (20) dobivamo

$$l_1 = \frac{-a+b+d}{3}. \tag{26}$$

Iz sl. 2, (25) i (26) slijede konačno relacije

$$l_1 = \frac{P_2}{P_1+P_2}l,\quad l_2 = \frac{P_1}{P_1+P_2}l. \tag{27}$$

Na kraju zaključujemo da je teorem u potpunosti dokazan, jer su koordinate u (25) i (27) funkcije od veličina l, P_1, P_2, što je i trebalo pokazati.

Korolar 1. Za deltoid $A_1A_2A_3A_4$ na sl. 2 vrijedi jednakost (3), što u našem slučaju glasi

$$P_1l_1 = P_2l_2. \tag{28}$$

Dokaz. Evidentno je da relacije (27) zadovoljavaju (28), što je i trebalo pokazati.

Teorem 3. (*Arhimedov zakon poluge*) *Neka je zadana ravna poluga (štap) bez mase, čija je duljina l, a na njezinim krajevima u točkama T_1 i T_2 koncentrirane su mase m_1 i m_2 respektivno. Točka T na poluzi će se zvati težište zadanih masa onda i samo onda ako je*

$$m_1l_1 = m_2l_2, \tag{29}$$

gdje je

$$|T_1T| = l_1;\quad |TT_2| = l_2. \tag{30}$$

Dokaz T3. Ovaj idealizirani eksperiment malo ćemo konkretizirati, a ipak nećemo ništa gubiti na općenitosti, naime iz tvrdnje teorema izlazi da je specifična gustoća obje materijalne točke beskonačno velika, a volumen tih masa jednak je nuli, dakle mase postaju neodređeni oblici $0\cdot\infty$, jer je masa homogenog tijela jednaka produktu njegovog volumena i specifične gustoće, koja je konstantna. Zamislimo sada, da te materijalne točke ekspandiraju u homogene kugle, koje su disjunktne, istih jako velikih specifičnih gustoća, ali tako da točke T_1 i T_2 budu u središtima (težištima) tih kugli, koje su općenito različitih volumena. Poznato je, da se za konstantnu masu vulumen smanjuje, ako se specifična gustoća povečava i obratno. Jasno je, da se nakon ove prostorne transformacije ništa ne mijenja što se odnosi na težište T.

Idemo sada na novu zamišljenu transformaciju danih kugli u trokute jako malih (skoro nula) jednakih debljina i jako velikih (skoro beskonačno) jednakih specifičnih gustoća, što je u skladu s uvodnim izlaganjima, i neka je to prezentirano na sl.2, a

sve je to napravljeno uz uvjet da su sada točke T_1 i T_2 težišta $\Delta B_1B_2B_3$ i $\Delta C_1C_2C_3$ respektivno, pa te trokute možemo preslikati u deltoid $A_1A_2A_3A_4$, što slijedi iz T2. Neka su debljine tih trokuta i deltoida h_0 a specifične gustoće ρ_∞. Budući vrijedi (28), tj. $P_1l_1 = P_2l_2$, a ako tu jednakost pomnožimo s h_0 i ρ_∞ dobivamo da

$$(P_1h_0\rho_\infty)l_1 = (P_2h_0\rho_\infty)l_2, \tag{31}$$

no budući je $m_1 = P_1h_0\rho_\infty$ i $m_2 = P_2h_0\rho_\infty$, to onda iz (31) slijedi (29), te se i nakon ove prostorne transformacije ništa ne mijenja što se odnosi na težište T. Lako se napravi i obrat, pa je time **Arhimedov zakon poluge** u potpunosti dokazan.

Napomena 2. U *T3* se kaže da poluga nema mase, tj. masa je jednaka nuli, svakako da u praksi to ne može biti. Kako ćemo onda realizirati pokus da se provjeri *T3*? Provjeru *Arhimedovog zakona poluge* možemo realizirati na jedan način (ima ih puno), tako da uzmemo ravni homogeni štap dovoljno dugačak, čija je duljina jednaka λ, i u polovištu tj. težištu T izvršimo podupiranje bez mogućeg proklizavanja, te od težišta u lijevu stranu u točki T_1 postavimo (objesimo) masu m_1, koja je za duljinu l_1 udaljena od T tj. $l_1 = |T_1T|$. Analogno postupimo i na desnom kraku, gdje u točki T_2 postavimo masu m_2, tako da je $l_2 = |TT_2|$. Uvjet da bi se pokus mogao izvršiti je $\lambda/2 \geqslant l_1, l_2$; i ako dobijemo da vrijedi $m_1l_1 = m_2l_2$, tada je točka T težište danih masa i obratno.

Napomena 3. U homogenom polju sile, npr. u gravitacijskom polju sile teže, je akceleracija $\vec{g}$ ($g \approx 9.81\, ms^{-2}$), pa ako (29) "pomnožimo" s $\vec{g}$ dobivamo

$$(m_1\vec{g})l_1 = (m_2\vec{g})l_2, \tag{32}$$

ili

$$\overrightarrow{F}_1 l_1 = \overrightarrow{F}_2 l_2, \tag{33}$$

a to je *Arhimedov zakon poluge* u vektorskom obliku, što je u stvari aksiom *klasične statike*. Budući da se on može izvesti, to se onda ne radi o aksiomu nego o teoremu, dakle može se sada uspostaviti *nova aksiomatika klasične statike*.

Napomena 4. *D1* i *T2* se mogu poopćiti, tako da se umjesto trokuta o ravninskom koordinatnom sustavu promatraju dva tetraedra u prostornom koordinatnom sustavu, i da se definiraju preslikavanja, koja će težišta tetraedara identički preslikati, a tetraedri će se preslikati u tertaedre čija je baza, jednakostranični trokut, zajednička, a volumeni im ostaju isti, te bi postupak tekao kao u obrađenom ravninskom slučaju, no time ne bi ništa dobili na općenitosti, samo bi imali kompliciraniji račun.

Literatura

[1] Boris Pavković, *Lagrangeov zakon i njegove primjene*, MFL br.1. 1987–1988.

[2] Boris Pavković, Petar Mladinić, *Arhimedova metoda težišta*, HMD, ŠK, Zagreb 1998.

[3] Petar Svirčević, *Težište ravninskog poligona i njegovog ruba*, I. dio ; Matematičko–fizički list, br.4, god. 2003–2004, (str. 248–254), Zagreb

[4] *The Geometer's Sketchpad* (korišteni program za crteže)

Vektori pomažu trigonometriji i algebri

Milan Šarić, Kneževo

U srednjoj školi uglavnom primjenjujemo vektore pri rješavanju planimetrijskih zadataka. Ovdje ćemo pokazati kako se pomoću vektora rješavaju i neki zadaci iz trigonometrije i algebre. Preporučujemo čitaocu da sve primjere pokuša riješiti bez primjene vektora, kako bi još bolje uočio efikasnost vektorske metode.

Zadatak 1. Neka je:

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0 \quad \text{i} \quad \cos x + \cos y + \cos z = 0.$$

Dokaži da je:

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0 \quad \text{i} \quad \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$

Rješenje. Uvedimo vektore

$$\vec{a} = (\cos x, \sin x), \quad \vec{b} = (\cos y, \sin y), \quad \vec{c} = (\cos z, \sin z).$$

Tada je

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1.$$

Iz uvjeta slijedi

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\cos x + \cos y + \cos z, \quad \sin x + \sin y + \sin z) = 0.$$

Dakle, vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su stranice nekog jednakostraničnog trokuta. Kako je kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, $\vec{a}$ i $\vec{c}$ jednak $\frac{2\pi}{3}$, slijedi

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y),$$

ili $x - y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. Analogno:

$$y - z = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \quad x - z = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi, \quad k, l, m \in Z.$$

Tada je

$$2x - 2y = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi, \text{ odnosno}$$

$$2y - 2z = -\frac{2\pi}{3} + 2l_1\pi,$$

$$2x - 2z = -\frac{2\pi}{3} + 2m_1\pi, \quad k_1, l_1, m_1 \in Z.$$

Uvedimo vektore:

$$\vec{a}_1 = (\cos 2x, \sin 2x), \quad \vec{b}_1 = (\cos 2y, \sin 2y), \quad \vec{c}_1 = (\cos 2z, \sin 2z).$$

Kako je $|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1| = |\vec{c}_1| = 1$, i kako je kut među vektorima $\vec{a}_1$ i $\vec{b}_1$, $\vec{a}_1$ i $\vec{c}_1$, $\vec{b}_1$ i $\vec{c}_1$ jednak $\frac{2\pi}{3}$, slijedi da su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ stranice nekog jednakostraničnog trokuta, pa je

$$\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1 = 0, \text{ ili}$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0,$$

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2. Dokaži nejednakost
$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z),$$
ako su a, b, c, x, y, z realni brojevi.

Rješenje. Uvedimo vektore:
$$\vec{u}=(x,y,z);\quad \vec{v}=(a,b,c);\quad \vec{w}=(1,1,1).$$
Imamo
$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad |\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2},\quad |\vec{w}|=\sqrt{3},$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad (\alpha \text{ je kut među } \vec{u} \text{ i } \vec{v}),\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=ax+by+cz$$
$$\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\beta \quad (\beta \text{ je kut među } \vec{u} \text{ i } \vec{w}),\quad \vec{u}\cdot\vec{w}=x+y+z$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\gamma \quad (\gamma \text{ je kut među } \vec{v} \text{ i } \vec{w}),\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=a+b+c.$$
Ako je jedan od vektora $\vec{u}$ ili $\vec{v}$ nul-vektor ($a=b=c=0$ ili $x=y=z=0$), jednakost je očigledna.

Pretpostavimo da vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nisu nul-vektori. Tada polaznu nejednakost možemo napisati u obliku
$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}+1 \geqslant 2\cdot\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|},$$
ili
$$\cos\alpha+1 \geqslant 2\cos\beta\cos\gamma,$$
što sada treba dokazati.

Moguća su dva slučaja:

1) Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su nekomplanarni.
Ako su vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nekomplanarni, tada su α, β, γ vršni kutovi triedra, a za njih vrijedi
$$\alpha<\beta+\gamma,\quad \alpha+\beta+\gamma<2\pi.$$
Tada je
$$\alpha<\min(\beta+\gamma, 2\pi-(\beta+\gamma)) \leqslant \pi, \text{ pa je}$$
$$\cos\alpha>\cos(\beta+\gamma)=\cos(2\pi-(\beta+\gamma)), \text{ tj.}$$
$$\cos\alpha+1>\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=2\cos\beta\cos\gamma,$$
jer je $1>\cos(\beta-\gamma)$. Time je nejednakost dokazana.

2) Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su komplanarni.
Tada je
$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi.$$
Kako je
$$\cos\alpha=\cos(2\pi-(\beta+\gamma))=\cos(\beta+\gamma),$$
slijedi da je
$$\cos\alpha+1 \geqslant \cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=2\cos\beta\cos\gamma,$$
pa je i u ovom slučaju nejednakost dokazana. Jednakost vrijedi za $\cos(\beta-\gamma)=1$, tj. $\beta=\gamma$, $\alpha=2\gamma$.

Zadatak 3. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu
$$x^2-4x+6=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}.$$

Rješenje. Uvedimo vektore:
$$\vec{m}=(1,1),\quad \vec{n}=\left(\sqrt{x-1}, \sqrt{3-x}\right).$$

Tada je:

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{x - 1 + 3 - x} = \sqrt{2},$$
$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}.$$

Napišimo lijevu stranu jednadžbe u obliku

$$x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Kako je

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{3-x}$$
$$\leqslant \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{x - 1 + 3 - x} = 2,$$

slijedi da je

$$x^2 - 4x + 6 = 2,$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2.$$

Rješavanjem ovog sustava ekvivalentnih jednadžbi, uz uvjet $x - 1 \geqslant 0$ i $3 - x \geqslant 0$, dobivamo rješenje $x = 2$.

Zadatak 4. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$2\sqrt{x+1} + 3x = \sqrt{(x^2+4)(x+10)}.$$

Rješenje. Neka su dani vektori:

$$\vec{m} = (2, x), \quad \vec{n} = \left(\sqrt{x+1}, 3\right), \quad (x + 1 \geqslant 0). \qquad (1)$$

Tada je

$$|\vec{m}| = \sqrt{x^2+4}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{x+10}, \quad \vec{m} \cdot \vec{n} = 2\sqrt{x+1} + 3x.$$

Dakle, prema (1) imamo

$$2\sqrt{x+1} + 3x \leqslant \sqrt{(x^2+4)(x+10)},$$

Ova nejednakost prelazi u jednakost ako su vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ kolinearni. Prema tome,

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{3} \quad \text{(uvjet kolinearnosti vektora } \vec{m} \text{ i } \vec{n}\text{)}, \ (x + 1 \neq 0).$$

Kvadriranjem ove jednadžbe i sređivanjem dobivamo

$$x^3 + x^2 = 36 \quad \text{ili} \quad (x-3)(x^2 + 4x + 12) = 0.$$

Jedino realno rješenje je $x = 3$.

Neposrednom provjerom utvrđujemo da je $x = 3$ rješenje jednadžbe.

Zadaci za vježbu

1. Dokaži jednakost $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \sin 80^\circ + \ldots + \sin 329^\circ = 0$.

2. Riješi jednadžbu $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

3. Riješi jednadžbu $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

O linearnom programiranju, IV. 2. dio

Luka Neralić[1], *Zagreb*

Odnosi između primarnog i dualnog problema

Razmotrimo sada opći oblik standardnog problema maksimizacije kao primarni problem (ili primal)

$$\max z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leqslant & b_m \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

Dualni problem (ili dual), do kojeg dolazimo pomoću navedenih pravila (a) – (i) na isti način i uz iste oznake kao u primjeru 10, je sljedeći standardni problem minimizacije

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_m\lambda_m$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\lambda_1 & + & a_{21}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\lambda_m & \geqslant & c_1 \\ a_{12}\lambda_1 & + & a_{22}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\lambda_m & \geqslant & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 & + & a_{2n}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_m & \geqslant & c_n \end{array}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ \lambda_m \geqslant 0.$$

Primal i dual mogu se kraće zapisati uz pomoć oznaka za sumaciju kao

$$\max z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \qquad (P)$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

i

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i$$

[1] Autor je redoviti profesor na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: lneralic@efzg.hr

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geqslant c_j, \ j = 1, 2, \dots, n \qquad (D)$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \dots, m.$$

Odnos između funkcija cilja primala (P) i duala (D) može se iskazati preko sljedećeg teorema.

Teorem 1. Za funkcije cilja $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ primala i $h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ duala vrijedi

$$z(x_1, \ x_2, \dots, \ x_n) \leqslant h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m),$$

$$\text{za svako } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_P, \ \text{ i svako } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in S_D,$$

pri čemu je S_P odnosno S_D skup mogućih rješenja primala (P) odnosno duala (D).

Za dokaz teorema vidi npr. Martić [5], str. 78, Neralić [10], str. 115–116, (gdje je primarni problem standardni problem minimizacije, pa vrijedi obrnuta relacija), Hadley [1], str. 228. U knjizi Murty [6], str. 190, tvrdnja teorema 1 (za slučaj primarnog problema minimizacije) naziva se slabim teoremom dualiteta. Istaknimo da prema teoremu 1 moguće rješenje duala određuje gornju ogradu funkcije cilja primala, dok moguće rješenje primala daje donju ogradu funkcije cilja duala.

Teorem 2. (Teorem o egzistenciji) Problem linearnog programiranja ima optimalno rješenje ako i samo ako su neprazni skupovi mogućih rješenja S_P primala (P) i S_D duala (D).

Dokaz teorema 2 može se naći npr. u Neralić [10], str. 116. Vidi također Intriligator [3], str. 131. Prema teoremu 2 optimalno rješenje problema linearnog programiranja postoji ako i samo ako svaki od dualnih problema ima moguće rješenje. U ranije razmotrenom primjeru 10 neprazni su skupovi mogućih rješenja S_P primala i S_D duala, i oba problema su imala optimalno rješenje. Ako je skup mogućih rješenja jednog od dualnih problema prazan, tada je ili prazan skup mogućih rješenja njegovog duala ili je funkcija cilja njegovog duala neomeđena na skupu mogućih rješenja. Općenito, ili oba dualna problema imaju moguća rješenja, pa onda po teoremu egzistencije imaju optimalna rješenja (kao u primjeru 10), ili samo jedan od dualnih problema ima moguće rješenje, pri čemu je njegova funkcija cilja neomeđena (pa tada dual nema mogućeg rješenja), ili ni jedan od dualnih problema nema mogućeg rješenja. Ilustrirajmo to na sljedećim primjerima.

Primjer 13. Razmotrimo ovaj problem linearnog programiranja

$$\max z = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \leqslant & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

Lako se može pokazati (vidi Neralić [8], str. 139, primjer 3, ili Neralić [9], str. 209) da je funkcija cilja tog problema neomeđena odozgo. Dualni problem tog problema je

$$\min h = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & \geqslant & 12 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & \geqslant & 8 \end{array}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0, \ \lambda_2 \geqslant 0.$$

Nije teško vidjeti (npr. grafički) da dualni problem nema mogućeg rješenja.

Primjer 14. Razmotrimo sljedeći problem linearnog programiranja

$$\max z = -x_1 - 2x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leqslant & -1 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Lako se pokaže da taj problem nema mogućeg rješenja, kao i da dualni problem

$$\min h = -\lambda_1 - 2\lambda_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & \geqslant & -1 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & \geqslant & -2 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0$$

ima odozdo neomeđenu funkciju cilja na skupu mogućih rješenja.

Primjer 15. Neka je primarni problem

$$\min h = -\lambda_1 - \lambda_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & - & \lambda_2 & \geqslant & 5 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & \geqslant & 4 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0.$$

Lako se pokaže da taj problem nema mogućeg rješenja, kao ni njegov dual

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \leqslant & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leqslant & -1 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Teorem 3. (Teorem dualiteta) Moguće rješenje problema linearnog programiranja je optimalno ako i samo ako postoji moguće rješenje dualnog problema, tako da su vrijednosti funkcija cilja oba problema jednake.

Za dokaz teorema 3 vidi Neralić [10], str 117. Vidi također Martić [5], str. 78–84, Murty [6], str. 192–193, gdje su navedene različite formulacije teorema dualiteta, te Intriligator [3], str. 132–134.

Teorem 4. (Princip oslabljene komplementarnosti) Točke $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ i $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ su optimalna rješenja primarnog problema (P) i dualnog problema (D), respektivno, ako i samo ako zadovoljavaju uvjete oslabljene komplementarnosti

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^*)x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

i

$$\lambda_i^*(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Za dokaz vidi npr. Martić [5], str. 85–86, Neralić [10], str. 117-118, Murty [6], str. 197–198. Vidi također Intriligator [3], str. 135.

Zbog ograničenja nenegativnosti $x_j^* \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ i $\lambda_i^* \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m$ iz prvih relacija u teoremu 4 dobivamo

$$\text{ako je} \quad x_j^* > 0, \quad \text{tada je} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* = c_j,$$

$$\text{ako je} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* > c_j, \quad \text{tada je} \quad x_j^* = 0,$$

dok iz drugih relacija proizlazi

$$\text{ako je} \quad \lambda_i^* > 0, \quad \text{tada je} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i,$$

$$\text{ako je} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \quad \text{tada je} \quad \lambda_i^* = 0.$$

Ilustrirajmo princip oslabljene komplementarnosti na primjeru 10

$$\max z(x_1, x_2) = 70x_1 + 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

i njegovom dualu

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 600\lambda_1 + 240\lambda_2 + 500\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} 5\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 & \geqslant & 70 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & \geqslant & 80 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.$$

Kako znamo iz tabele 1, optimalno rješenje primala je $x_1^* = 40,\ x_2^* = 100,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 100$, dok je maksimalna vrijednost funkcije cilja $z^* = 10\,800$. Tada prema principu oslabljene komplementarnosti dobivamo:

$$\text{iz} \quad x_1^* = 40 > 0 \ \text{ slijedi } \ 5\lambda_1^* + \lambda_2^* + 5\lambda_3^* = 70$$
$$\text{iz} \quad x_2^* = 100 > 0 \ \text{ slijedi } \ 4\lambda_1^* + 2\lambda_2^* + 2\lambda_3^* = 80.$$

Osim toga, imamo:

$$\text{iz} \quad 5x_1^* + 2x_2^* = 400 < 500 \ \text{ slijedi } \ \lambda_3^* = 0.$$

Tada se iz sustava lineranih jednadžbi

$$\begin{array}{rcl} 5\lambda_1^* + \lambda_2^* + 5\lambda_3^* & = & 70 \\ 4\lambda_1^* + 2\lambda_2^* + 2\lambda_3^* & = & 80, \end{array}$$

zbog $\lambda_3^* = 0$ dobiva

$$\begin{array}{rcl} 5\lambda_1^* + \lambda_2^* & = & 70 \\ 4\lambda_1^* + 2\lambda_2^* & = & 80. \end{array}$$

Iz tog sustava se lako dobije $\lambda_1^* = 10$ i $\lambda_2^* = 20$. Pripadna optimalna vrijednost funkcije cilja duala je $h^* = 600\lambda_1^* + 240\lambda_2^* + 500\lambda_3^* = 6000 + 4800 + 0 = 10\,800$, tj. jednaka je optimalnoj vrijednosti funkcije cilja primala, što je u skladu s teoremom dualiteta.

Ekonomska interpretacija dualiteta

Razmotrimo najprije problem transporta. Pretpostavimo da u m centara ponude (ishodišta) imamo količine $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m$ nekog homogenog proizvoda, kojeg treba prevesti u n centara potražnje (odredišta), s poznatom količinom potražnje $b_1,\ b_2,\ldots,\ b_m$ tog proizvoda. Neka su nadalje poznati troškovi transporta $c_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$ jedinice proizvoda iz svakog ishodišta i u svako odredište j. Problem se sastoji u tome da se odrede količine $x_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$ proizvoda, koje treba prevesti iz ishodišta i u odredište j, tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni, da ukupna količina prijevoza iz ishodišta i ne premaši ponudu $a_i, i = 1,2,\ldots,m$, te da prevezena količina robe u odredište j ne bude manja od potražnje $b_j, j = 1,2,\ldots,n$. Taj se problem može formulirati kao problem linearnog programiranja u obliku

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

uz ograničenja

$$-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant -a_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j,\ j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Napomenimo, da se ovaj oblik problema transporta razlikuje od problema razmatranog npr. u Kurepa, Neralić [4], str. 144, Neralić [10], str. 90, kojemu su ograničenja u obliku jednadžbi. Naime, ovdje se zahtijeva da ukupna količina prijevoza iz ishodišta i ne premaši ponudu $a_i, i = 1,2,\ldots,m$, te da prevezena količina robe u odredište j ne bude manja od potražnje $b_j, j = 1,2,\ldots,n$. Osim toga, prvo ograničenje dobiveno je iz originalnog, koje ima znak $\leqslant$, množenjem s (-1). Za tako postavljeni problem transporta, uvođenjem dualnih varijabli u_i i v_j, dualni problem je

$$\max h = -\sum_{i=1}^{m} a_iu_i + \sum_{j=1}^{n} b_jv_j$$

uz ograničenja

$$-u_i + v_j \leqslant c_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$$
$$u_i \geqslant 0,\ v_j \geqslant 0,\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Ako dualnu varijablu u_i interpretiramo kao vrijednost (cijenu) robe u ishodištu i, a varijablu v_j kao vrijednost (cijenu) robe u odredištu j, onda prema ograničenjima dualnog problema mora vrijediti

$$v_j \leqslant u_i + c_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Prema tome, dualne varijable treba odrediti tako, da vrijednost robe u odredištu j ne premaši zbroj vrijednosti robe u ishodištu i i transportnih troškova od ishodišta i do odredišta j. Osim toga, u optimalnom rješenju iz principa oslabljene komplementarnosti dobivamo:

$$\text{za}\ \ x_{ij}^* > 0, \quad \text{slijedi} \quad -u_i + v_j = c_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Dakle, ako se iz ishodišta i u odredište j treba prevesti količina robe $x_{ij}^* > 0$, tada je vrijednost robe u odredištu jednaka vrijednosti u ishodištu uvećanoj upravo za trošak

transporta. To znači da bi se moglo angažirati prijevoznika, koji bi robu kupio u ishodištu i po cijeni u_i, prevezao količinu b_j i prodao je u odredištu j po cijeni v_j. Prema teoremu dualiteta vrijednosti funkcija cilja u optimalnom rješenju primala i duala su jednake, pa bi na taj način prijevoznik dobio upravo iznos minimalnih troškova transporta. (Vidi npr. Neralić [10], str. 121–122, Martić [5], str. 97–98, Hadley [1], str. 486–487.)

Razmotrimo još i problem alokacije resursa. Pretpostavimo da poduzeće ima određenu količinu svakog od m resursa, koje treba alocirati na n aktivnosti (ili procesa). (Vidi npr. Hillier, Lieberman [2], str. 33–34, Martić [5], str. 94–96, Neralić [10], str. 12–13.) Svaka aktivnost karakterizirana je utroškom resursa pri jediničnoj razini aktivnosti. Ovdje nam aktivnost predstavlja količinu proizvodnje nekog proizvoda iz raspoloživih resursa. Pretpostavimo još da imamo određenu vrijednost koja mjeri ukupne postignute rezultate (ovdje ćemo promatrati ukupan profit), uz poznato povećanje te vrijednosti koje je rezultat jediničnog povećanja svake od aktivnosti (tj. profit po jedinici proizvoda). Problem se sastoji u alociranju resursa na aktivnosti, uvažavajući činjenicu o raspoloživim količinama resursa uz ostvarivanje maksimalne vrijednosti ukupnih postignutih rezultata (ukupnog profita). Uz uobičajene pretpostavke u linearnom programiranju (proporcionalnost, aditivnost i djeljivost) i oznake

a_{ij} – utrošak resursa i po jedinici proizvoda j $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$;

b_i – raspoloživa količina resursa i $(i = 1, 2, \ldots, m)$;

c_j – profit po jedinici proizvoda j $(j = 1, 2, \ldots, n)$;

x_j – nepoznata razina aktivnosti j $(j = 1, 2, \ldots, n)$,

postavljeni problem može se formulirati kao problem linearnog programiranja oblika

$$\max h = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Njegov dual je

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \geqslant c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Kako je c_j profit po jedinici proizvoda j, znači da ima dimenziju kuna po jedinici, pa tada $a_{ij}\lambda_i$ također mora imati dimenziju kuna po jedinici proizvoda j. Međutim, dimenzija od a_{ij} je jedinica resursa i po jedinici proizvoda j. Prema tome, dimenzija dualne varijable λ_i je kuna po jedinici resursa i, pa ona predstavlja vrijednost (cijenu ili trošak) jedinice resursa i, $i = 1, 2, \ldots, m$, za poduzeće koje njime raspolaže. Funkcija cilja izražava ukupnu vrijednost raspoloživih resursa. Zatim, izraz

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i$$

predstavlja vrijednost (trošak) svih m resursa potrebnih za proizvodnju jedinice proizvoda j. Prema ograničenjima dualnog problema taj trošak ne može biti manji od profita c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ po jedinici proizvoda. Dakle, iz dualnog problema određuju se λ_i tako da se minimizira ukupna vrijednost resursa, pri čemu vrijednost resursa utrošenih u proizvodnji jedinice proizvoda j ne može biti manja od profita c_j ostvarenog prodajom jedinice proizvoda j. (Vidi npr. Hadley [1], str. 483–484, Neralić [10], str. 123.)

Iz principa oslabljene komplementarnosti dobivamo:

$$\text{za } x_j^* > 0, \quad \text{slijedi } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* = c_j.$$

To znači, da za proizvod koji treba proizvoditi prema optimalnom rješenju trošak mora biti jednak profitu. Osim toga,

$$\text{za } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i \quad \text{slijedi } \lambda_i^* = 0.$$

Prema tome, ako resurs i nije u potpunosti iskorišten, njegova dualna cijena jednaka je nuli. (Vidi naprijed primjer 10 i konkretnu intrepretaciju rješenja primala i duala.)

Može se pokazati da za optimalnu vrijednost λ_i^*, koja se naziva cijenom u sjeni, dualnom cijenom ili oportunitetnim troškom, vrijedi

$$\frac{\partial h}{\partial b_i}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \lambda_i^*, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

U skladu s tim, λ_i^* pokazuje za koliko se približno promijeni optimalna vrijednost funkcije cilja primala, ako se resurs i poveća za jednu jedinicu. Pritom, znajući s jedne strane vrijednost λ_i^*, koja odgovara i-tom ograničenju zadovoljenom kao jednakost u optimalnom rješenju primala (raspoloživi resurs je u potpunosti iskorišten) i s druge iznos ulaganja u povećanje resursa i za jednu jedinicu, može se vidjeti ima li to ulaganje smisla. Naime, ulaganje u proširenje kapaciteta resursa i ima smisla, ako je dualna cijena λ_i^* veća od iznosa ulaganja, jer je tada povećanje profita veće od ulaganja.

Zadaci za vježbu

1. Za problem linearnog programiranja

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 5x_2 & \leqslant & 40 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 21 \\ x_1 & & & \leqslant & 8 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0} \end{array}$$

formulirajte njegov dual. Primarni problem riješite simpleks metodom, a dualni na temelju rješenja primala i principa oslabljene komplementarnosti. (Usporedite Neralić [10], str. 184.)

2. Formulirajte dual problema

$$\min h = 17\lambda_1 + 8\lambda_2 + 32\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 & \geqslant & 5 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 8 \\ \multicolumn{3}{c}{\lambda_1 \geqslant 0, \; \lambda_2 \geqslant 0, \; \lambda_3 \geqslant 0.} \end{array}$$

Primal i dual riješite simpleks metodom. Provjerite da su optimalne vrijednosti funkcija cilja jednake. Kako se interpretira optimalno rješenje duala?

3. Simpleks metodom pokažite da funkcija cilja primala u primjeru 13 nije omeđena odozgo na skupu mogućih rješenja, pa taj problem nema optimalno rješenje.

4. Pokažite grafički da dualni problem u primjeru 13 nema mogućeg rješenja. Do istog zaključka dođite Charnesovom M -metodom ili dvofaznom simpleks metodom.

5. Provjerite da primal u primjeru 14 nema mogućeg rješenja, dok funkcija cilja duala nije omeđena odozdo na skupu mogućih rješenja.

6. Pokažite da u primjeru 15 ni primal ni dual nemaju moguće rješenje.

7. Za problem alokacije resursa pri proizvodnji dva proizvoda od četiri vrste sirovina (raspoložive količine sirovina su u tisućama kilograma, utrošci pojedine sirovine po jedinici proizvoda u kilogramima, te profit po jedinici proizvoda u tisućama kuna) formuliran je sljedeći problem linearnog programiranja

$$\max z = 7x_1 + 5x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 19 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leqslant & 13 \\ & & 3x_2 & \leqslant & 15 \\ 3x_1 & & & \leqslant & 18 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

Riješite taj problem simpleks metodom (koja daje i optimalno rješenje duala), a zatim formulirajte dual tog problema, te provjerite i interpretirajte njegovo rješenje.

Literatura

[1] G. Hadley, *Linear Programming*, Addison Wesley, Reading, MA, 1962.
[2] F. S. Hillier and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 2001.
[3] M. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971. (Ruski prijevod: Progress, Moskva, 1975.)
[4] S. Kurepa, L. Neralić, *Matematika 3*, Udžbenik i zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2000.
[5] Lj. Martić, *Matematičke metode za ekonomske analize*, II svezak, Treće izdanje, Narodne Novine, Zagreb, 1979.
[6] K. G. Murty, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
[7] S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, International Edition, New York, 1996.
[8] L. Neralić, *O linearnom programiranju, I*, Matematičko-fizički list, **LI** 3 (2000.–2001.), 134–140.
[9] L. Neralić, *O linearnom programiranju, II*, Matematičko-fizički list, **LI** 4 (2000.–2001.), 202–211.
[10] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.
[11] N. Wu and R. Coppins, *Linear Programming and Extensions*, McGraw-Hill, New York, 1981.



ASTRONOMIJA

Kombinirani pristup u astronomiji

Dario Hrupec[1], *Koprivnica*

Uvod

Pročitavši nedavno staru indijsku priču o slijepcima i slonu[2] uočio sam zgodnu analogiju s kombiniranim[3] pristupom u astronomiji (engl. multimessenger approach). Za razliku od slijepaca iz priče, astronomi su danas svjesni da svoje različite poglede u nebo moraju ujediniti kako bi dobili širu sliku i bolje razumjeli ono što opažaju.

Sama ideja nije nova. Čim se pojavila radioastronomija, u prvoj polovici prošlog stoljeća, astronomi su počeli kombinirati podatke dobivene radioteleskopima s podacima dobivenim optičkim teleskopima. To je kasnije dovelo do otkrića pulsara (brzorotirajućih neutronskih zvijezda) i kvazara (izuzetno sjajnih središta najudaljenijih galaksija s aktivnim supermasivnim crnim rupama). Promatranje istih objekata u samo dva različita dijela elektromagnetskog spektra (vidljivom i radio) pokazalo je da svemir nije SVE+MIR, nego je dinamično područje u kojem dominiraju najdramatičniji događaji. Drugom polovicom prošlog stoljeća, opažanje fotona iz svemira proširilo se na cijeli elektromagnetski spektar[4]. Istovremena opažanja na različitim valnim duljinama (engl. *multiwavelength campaign*) postala su uobičajena među astronomima. Tako se npr. opažanja blazara (jedne vrste kvazara) često unaprijed dogovaraju u radiopodručju, optičkom području, X-području i visokoenergijskom gama-području. Sljedeći korak, na koji se astronomi i astrofizičari zadnjih godina pripremaju, kombiniranje je opažanja u elektromagnetskom području (**fotona** kao prenositelja informacija) s opažanjima drugih vrsta prenositelja informacija – astrofizičkim **neutrinima** te **gravitacijskim valovima**.

Neutrinska astronomija

Neutrino je neutralna elementarna čestica vrlo male mase[5] koja izuzetno slabo međudjeluje s okolinom. Bez teškoće može proći kroz cijelu Zemlju pa čak i kroz cijelu zvijezdu poput Sunca. Stoga je neutrine jako teško opažati. Ipak, fizičari su domišljatim eksperimentima uspjeli detektirati pojedinačne neutrine zahvaljujući detektorima velike gustoće ili pak vrlo velikog obujma.

Zbog mogućnosti da s lakoćom prolaze kroz zvijezde, neutrini su brzo prepoznati kao potencijalni prenositelji astrofizičkih informacija. Npr. nuklearne reakcije fuzije u Suncu snažan su izvor neutrina. Za detekciju kozmičkih neutrina sa Sunca (solarnih neutrina), Davis i Koshiba dobili su 2002. godine Nobelovu nagradu.

---

[1] Autor je asistent u Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu, e-mail: dario.hrupec@irb.hr

[2] Jedna od verzija dobropoznate indijske priče može se naći na *www.cs.princeton.edu/~rywang/berkeley/258/parable.html*

[3] Autor još traži dobar termin u hrvatskom jeziku. Svi su prijedlozi dobrodošli.

[4] Pogledajte članak D. Hrupec, Gama-astronomija – posljednji elektromagnetski prozor u svemir, MFL 1, 2005./06.

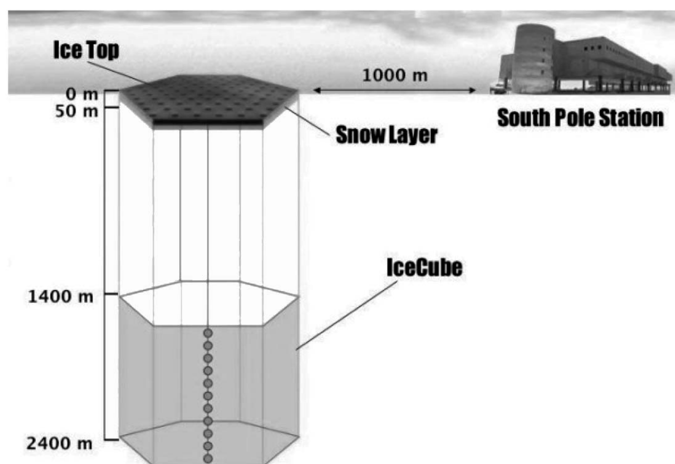
[5] Da neutrino uopće ima masu, općeprihvaćeno je tek 1998. godine objavom rezultata eksperimenta Super-Kamiokande.

Prijelomni događaj u području detekcije izvanzemaljskih neutrina zbio se 1987. godine kad su detektorom Kamiokande opaženi neutrini nastali u eksploziji supernove SN1987A.

Posebno je zanimljiva mogućnost detekcije izvangalaktičkih neutrina. Za tu svrhu potrebni su detektori obujma kubičnog kilometra koje je moguće ostvariti korištenjem npr. polarnog leda. Dva najpoznatija takva detektora, koji se nazivaju i neutrinskim teleskopima, su AMANDA i IceCube.

AMANDA je neutrinski teleskop smješten na Južnom polu. Sastoji se od 19 nizova s više od 700 optičkih detektora koji su spušteni u antartički led na dubine od 1500 do 1900 m. Ti detektori opažaju Čerenkovljevu svjetlost koja nastaje prolaskom visokoenergijskih miona kroz led. Mioni su elementarne čestice ("teški" elektroni) koje nastaju kad neki od neutrina uspije izazvati reakciju s atomskom jezgrom kisika ili vodika. AMANDA je počela s opažanjima još 1996. godine i detektirala tisuće neutrina, no njezina je osjetljivost još uvijek premala da bi se pouzdano mogli vidjeti pojedinačni astrofizički izvori.

IceCube je nasljednik eksperimenta AMANDA i bit će smješten na istoj lokaciji na Južnom polu. Prvi niz optičkih modula već je položen (slika 1) prošle godine. Osjetljivost IceCubea bit će znatno bolja od osjetljivosti neutrinskog teleskopa AMANDA tako da se očekuje opažanje pojedinačnih izvora kozmičkih neutrina. Kad dobije svoje prve izvore, neutrinska astronomija postat će priznata grana astronomije.



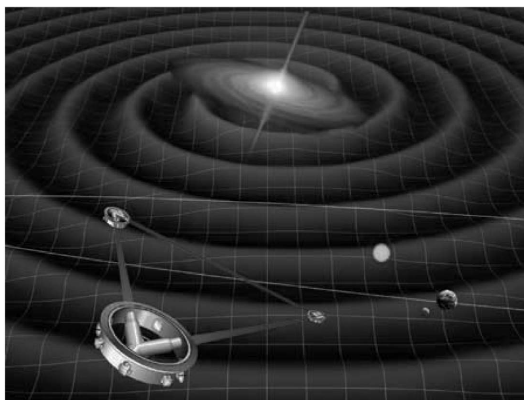
Slika 1. Prikazan je samo jedan od budućih 80 nizova optičkih modula neutrinskog teleskopa IceCube. (Izvor: http://icecube.wisc.edu/gallery/detector_concepts/instrumentsfuture_001)

Detekcija gravitacijskih valova

Gravitacijski valovi su poremećaji u zakrivljenosti prostor-vremena i šire se poput elektromagnetskih valova. Uzrokuje ih snažno gibanje velikih masa ili naglo oslobađanje velikih količina energije. Predviđeni su Einsteinovom općom teorijom relativnosti, ali ih je izuzetno teško direktno opaziti. Detekcija gravitacijskog zračenja još je veći

eksperimentalni izazov od opažanja neutrina. Iako gravitacijski valovi još nisu opaženi neposredno, nađen je važan posredni dokaz njihovog postojanja: u dvojnom sustavu pulsara PSR B1913+16 postoji malo, ali trajno smanjivanje perioda rotacije. Razlog za to gubitak je energije koji točno odgovara energiji odaslanog gravitacijskog zračenja. Za otkriće ovog dvojnog pulsara i posrednu detekciju gravitacijskih valova, Hulse i Taylor dobili su 1993. godine Nobelovu nagradu.

Neposredno opažanje gravitacijskih valova svodi se na opažanje sitnih relativnih pomaka između dva tijela. Ako dvije promatrane mase postavimo na udaljenost od nekoliko kilometara očekivani pomak uzrokovan gravitacijskim valovima manji je od veličine atoma (10^{-10} m) ili čak manji od veličine atomske jezgre (10^{-15} m). S obzirom da su ti pomaci sitniji od termičkog gibanja prisutnog u tvari, detekcijske tehnike uključuju hlađenje uređaja na vrlo niske temperature (čime se smanjuje termičko gibanje) ili princip interferometrije (precizne laserske zrake koje prolaze dugačke putove i na kraju međudjeluju što omogućuje izuzetno precizna mjerenja). Fizičari pripremaju nekoliko velikih eksperimenata za direktnu detekciju gravitacijskih valova. Najpoznatiji među njima su LIGO i LISA.



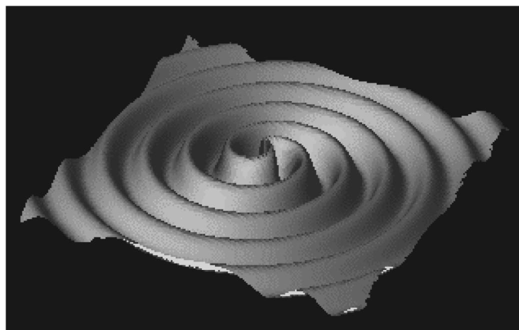
Slika 2. Tri svemirske letjelice eksperimenta LISA kružit će u orbitama oko Sunca. (Izvor: http://lisa.jpl.nasa.gov/gallery/lisa-waves.html)

LIGO je interferometar smješten na površini Zemlje. Sastoji se od dva opservatorija međusobno udaljena više od 3 000 km. Svaki opservatorij ima dva kraka, u obliku slova L, dugačka četiri kilometra. Prva mjerenja napravljena su krajem 2002., no pokazalo se da je osjetljivost uređaja premala čak i za najsnažnije izvore gravitacijskog zračenja. Opažačke tehnike razvijene za LIGO poslužit će za razvoj iduće generacije interferometara sa znatno boljom osjetljivošću.

LISA je interferometar koji će biti smješten u orbitu oko Sunca. Sastojat će se od tri neovisne svemirske letjelice međusobno udaljene pet milijuna kilometara (slika 2). Razvoj detektora LISA već je počeo i lansiranje se planira za 2015. godinu. Očekuje se da će LISA moći opaziti tisuće galaktičkih izvora (npr. sudare dviju neutronskih zvijezda) i neke izvangalaktičke izvore (stapanje supermasivnih crnih rupa).

Primjer – sudar neutronskih zvijezda

Dvojni sustav bliskih kompaktnih kozmičkih objekata[6] izvrstan je primjer za primjenu kombiniranog pristupa u astronomiji. Takav sustav tipičan je galaktički izvor gravitacijskih valova (slika 3), a u svojoj završnoj fazi snažan je izvor neutrina i visokoenergijskog gama-zračenja (γ-zračenja).



Slika 3. Umjetnički prikaz izobličenja prostor-vremena uzrokovanog gibanjem bliskih neutronskih zvijezda. (Izvor: http://lisa.jpl.nasa.gov/WHATIS/grav-wave.html)

Najčešći primjer takvog sustava dvije su bliske neutronske zvijezde koje kruže jedna oko druge. Izuzetno dinamično gibanje velikih masa u relativno malom prostoru uzrokuje periodična izobličenja prostor-vremena, odnosno emisiju gravitacijskih valova. Gravitacijski valovi pomalo odnose energiju iz sustava pa se neutronske zvijezde međusobno približavaju i zapravo spiralno padaju jedna na drugu. Konačni ishod je sudar u kojem se dvije neutronske zvijezde stapaju stvarajući pritom crnu rupu. U toj završnoj fazi nastaje izuzetno snažna provala γ-zračenja (engl. *gamma ray burst* – GRB) pri čemu se javlja i intenzivna emisija visokoenergijskih neutrina.

I za kraj evo slikovitog primjera da sve navedeno nije priča o dalekoj budućnosti astronomije nego priča koja je već počela. U zadnjem broju prošlog godišta Matematičko-fizičkog lista objavljen je zanimljiv tekst o provalama γ-zračenja[7]. Od 1967. godine, kad su prvi put otkrivene, provale γ-zračenja opisivane su kao tajanstvene. Pod tim se smatra da nije poznato kako nastaju. Trideset godina kasnije, 1997., objašnjena je jedna vrsta provala γ-zračenja, tzv. dugotrajne provale (duže od dvije sekunde). Njihov izvor su snažne eksplozije jedne vrste supernova. Druga vrsta provala γ-zračenja, tzv. kratkotrajne provale (kraće od dvije sekunde), ostala je neobjašnjena donedavno. Još na početku ove školske godine, u rujnu 2005. moglo se kratkotrajne provale γ-zračenja karakterizirati kao tajanstvene. No, u listopadu 2005. objavljeno je otkriće kako nastaju kratkotrajne provale γ-zračenja – stapanjem dvojnog sustava neutronskih zvijezda ili kratko rečeno *sudarom neutronskih zvijezda.*

Više informacija o spomenutim eksperimentima možete naći na web stranicama:

```
http://amanda.wisc.edu/
http://www.icecube.wisc.edu/
http://lisa.jpl.nasa.gov/
http://www.ligo.caltech.edu/
```

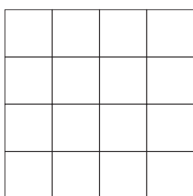
[6] Kompaktni kozmički objekt ili kompaktna "zvijezda" je krajnja točka zvjezdane evolucije. Može biti bijeli patuljak, neutronska zvijezda ili crna rupa.

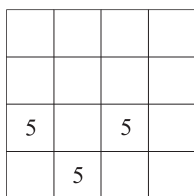
[7] Pogledajte članak N. Soić, Erupcije γ-zraka – najsjajnije i najtajanstvenije pojave u svemiru, MFL 4, 2004./05.

ZABAVNA MATEMATIKA

Mala kombinacija

Zadatak se sastoji od dva dijela. Prvi dio je popunjavanje male križaljke u prvom kvadratu 4×4 riječima ANAL, GRAL, GROŠ, LAKO, OLAK, RELI, RENA i ŠILO. Kad ste križaljku popunili, onda potražite zamjenu za deset različitih slova: A, E, G, I, K, L, N, O, R i Š među brojkama od 0 do 9, ali tako da nakon upisa brojki u drugi kvadrat 4×4 zbroj brojki u svakom retku i svakome stupcu bude jednak 17. Petica je već upisana.



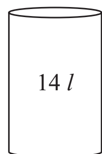


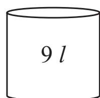
Ugodna zabava!

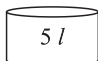
Dvije grupe

U kemijskom kabinetu učenici su pozorno slušali objašnjenje svoje profesorice:

– Danas ćete vršiti pokuse podijeljeni u dvije grupe. U tu vam svrhu treba razrijeđena lužina. Na mojem stolu vidite punu posudu s 14 litara takve lužine i još dvije prazne posude od 9 i 5 litara. Najprije ćete svi zajedno za potrebe dvije grupe točno rastočiti lužinu na dva jednaka dijela pomoću ovih posuda. Malo matematike neće vam škoditi!







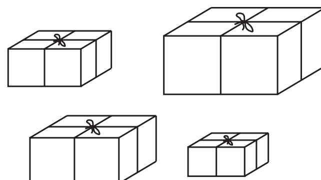
Kako su učenici izvršili rastakanje lužine na dva jednaka dijela?

Paketi

Poštar Brzić je sav zadihan stigao pred svoju kuću i ispričao svom susjedu Bistriću:

– Ovaj sam tjedan imao posla preko glave. Uručio sam veliki broj pisama, ali i 29 paketa od 1, 5, 10 i 50 kilograma u ukupnoj težini od 361 kilogram. Zaboravio sam koliko je točno bilo paketa od svake pojedine vrste.

– Pa to i nije teško ustanoviti - rekao je Bistrić. – Mogu ti odmah reći te brojeve. Hm, ipak postoji mala dilema.



Što muči Bistrića?

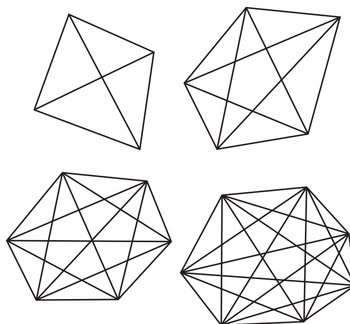
Pet sedmica

S brojem 7 su u svakodnevnom životu povezane mnoge stvari. Ljudi k tome smatraju da je 7 sretan broj. A što se tek može postići s pet sedmica! Eto, vaš je zadatak da se malo poigrate i prikažete prvih deset prirodnih brojeva pomoću pet sedmica, računskih operacija i zagrada. Jeste li uspjeli?

7 7 7 7 7

Poligoni

Evo jednog zanimljivog problema o poligonima. Najprije nacrtajte četverokut, peterokut, šesterokut i sedmerokut sa svim njihovim dijagonalama.



Zatim potražite odgovor na sljedeće pitanje: koji se od dobivenih crteža može izvesti jednim potezom olovke?

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2006. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/226.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

2993.* Neka su a, b, c međusobno različiti brojevi. Može li izraz

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

biti jednak nuli?

2994.* Nađi sva rješenja sistema jednadžbi

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=\ldots=\frac{x_{1001}}{x_{1001}+2001},$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_{1001}=2002.$$

2995. U zavisnosti o realnom parametru a riješi sistem jednadžbi

$$x^3+y^3=(a+1)^2(x+y),$$
$$x^2+y^2=2a^2.$$

Uz koje uvjete su rješenja realna?

2996. Neka je z kompleksan broj modula 1. Za svaki $n\in\mathbf{N}$ dokaži nejednakost

$$n|1+z|+|1+z^2|+\ldots+|1+z^{2n+1}|\geqslant 2n.$$

2997.* Dvije kružnice polumjera r i R dodiruju se izvana. Odredi udaljenost dirališta vanjske tangente.

2998. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u dvije različite točke M i N. Njihova zajednička tangenta dodiruje k_1 u P i k_2 u Q. Dokaži da trokuti MNP i MNQ imaju jednake površine.

2999. Dan je paralelogram $ABCD$. Točka E je na pravcu AB tako da je B između A i E, a F na pravcu AD tako da je D između A i F. Nadalje, G je presjek pravaca DE i BF. Dokaži da su jednake površine četverokuta $ABGD$ i $CFGE$.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

3000. U danom trokutu t_a, t_b, t_c su duljine težišnica, a r_a, r_b, r_c duljine polumjera pripisanih kružnica. Dokaži da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je

$$\frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_b^2}=\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}.$$

3001. Točka P se nalazi na kružnici opisanoj oko pravilnog poligona $A_1A_2\ldots A_n$. Ortogonalne projekcije točke P na pravce na kojima leže njegove stranice označene su s P_1, P_2, … ,P_n. Dokaži da produkt

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{|PA_i|^2}{|PP_i|}$$

ne ovisi o izboru točke P.

3002. Ako su α, β i γ kutovi trokuta, dokaži nejednakost

$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta}}+\frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}}\geqslant 3.$$

3003. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke polinoma

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$$

s realnim koeficijentima. Dokaži relaciju

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\ldots(x_n^2+1)$$
$$=(1-p_2+p_4-\ldots)^2+(p_1-p_3+\ldots)^2.$$

3004. Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadan je rekurzivno:

$$a_0=-1,$$
$$a_n=\frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4},\quad n\in\mathbf{N}.$$

Odredi opći član a_n.

3005. Na kružnici polumjera R dane su točke A i B čija udaljenost je jednaka l. Koja je najmanja vrijednost zbroja $|AC|^2+|BC|^2$ ako je C na danoj kružnici?

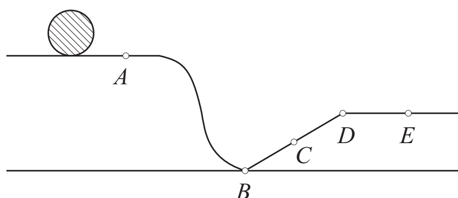
3006. U kutiji se nalazi a crnih, b bijelih i c crvenih kuglica. Kolika je vjerojatnost da između tri izvučene kuglice barem dvije budu iste boje?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 246. Ferrari GTC ima širinu guma 375 mm i promjer prednjih guma 650 mm, a stražnjih 705 mm. Kolika je njegova masa ako ravnu podlogu dodiruje s 5% površine guma i djeluje tlakom od 70 000 Pa na podlogu?

OŠ – 247. Nika se vozi nagibnim vlakom brzinom 120 km/h. Ususret joj dolazi putnički vlak brzinom 60 km/h. Nika je pogledala na sat i vidjela da je lokomotiva pored nje prošla točno u 11 sati, a zadnji vagon u 11 sati i 8 s. Kolika je duljina putničkog vlaka?

OŠ – 248. Metalna kugla se giba po glatkoj površini od točke A do točke E. Trenje i otpor zaraka mogu se zanemariti.



Što se događa s ukupnom energijom te kugle dok se giba? U kojoj točki kugla ima najmanju potencijalnu gravitacijsku energiju? U kojoj točki kugla ima najveću brzinu? Da li je brzina kugle veća u točki D ili E? Objasnite odgovore.

OŠ – 249. Dva čamca su usidrena na udaljenosti od 5 m. Odjednom se pojavi val koji ih njiše gore-dolje svakih 2 s. Nikad nema brijega vala između njih. Skicirajte taj val i čamce. Izračunajte brzinu vala.

1336. Zrnca pijeska, svako mase $3 \cdot 10^{-3}$ g, padaju s visine od 0.8 m na ljepljivu površinu. Svake sekunde padne 50 zrnca/cm^2. Odredite tlak koji proizvodi taj pljusak pijeska.

1337. Kamen, mase 3 kg, visi na laganoj niti na stropu dizala i u potpunosti je uronjen u kantu vode, koja se nalazi na podu dizala, tako da ne dodiruje niti dno, niti stijenke kante. Dok dizalo miruje, napetost niti iznosi 21 N. Odredite napetost niti kada se dizalo ubrzava prema gore akceleracijom 2.5 m/s^2.

1338. Kamionu otkažu kočnice dok se spušta niz zaleđenu padinu, koja je nagnuta pod kutom α prema horizontali. Masa kamiona je m, a u trenutku otkazivanja kočnica ima brzinu v_0. Nakon što prijeđe ostatak nizbrdice, duljine L, vozač se odmah počne penjati s ugašenim motorom na drugo brdo, kako bi zaustavio kamion. To brdo ima meku zemljanu podlogu, koeficijenta trenja μ, i nagnuto je prema horizontali pod kutom β. Koliki će put kamion prijeći po tom brdu do zaustavljanja?

1339. Ravni komad vodljive žice, mase M i duljine L, smješten je poprečno na kosinu koja zatvara kut α s horizontalom. Trenje zanemarimo. Homogeno magnetsko polje B usmjereno je vertikalno prema gore u svim točkama kosine. Da bismo spriječili klizanje žice niz kosinu, na njezine krajeve priključimo izvor napona. Kada točno određena struja poteče žicom, ona miruje na kosini. Odredite jakost i smjer struje u žici, koji omogućuju da žica ostane mirovati.

1340. Mali kamen leži na dnu velikog bazena, dubokog 4 m. Odredite najmanji polumjer kružnog kartona, koji bi, plutajući na površini bazena upravo iznad kamena, učinio ga nevidljivim iz svakog smjera. Indeks loma za vodu iznosi 1.33.

1341. Foton valne duljine 0.1100 nm sudari se sa slobodnim elektronom koji miruje. Nakon sudara valna duljina fotona iznosi 0.1132 nm. Kad se elektron naglo zaustavi, sva se njegova kinetička energija iskoristi za stvaranje novog fotona. Kolika je valna duljina tog fotona?

1342. Kružna petlja od žice može se koristiti kao radio antena. Jedna takva, promjera 18 cm, udaljena je 2.5 km od izvora radio valova, frekvencije 95 MHz i snage 55 kW. Kolika je maksimalna elektromotorna sila koja se inducira u petlji? Pretpostavite da je površina petlje okomita na smjer upadnog magnetskog polja i da izvor zrači jednoliko u svim smjerovima unutar pola prostornog kuta.

C) Rješenja iz matematike

2965. *a) Za koje prirodne brojeve n, broj $2n$ dijeli zbroj prvih n prirodnih brojeva?*

b) Odredi prirodne brojeve n, ako takvi postoje, za koje $2n+1$ dijeli zbroj prvih n prirodnih brojeva.

Rješenje. a) Neka je zbroj prvih n prirodnih brojeva S. Tada je

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $2n|S$ tj.

$$2n|\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 2n\cdot k, k\in \mathbf{N}.$$

Dobivamo $n = 4k-1$.

Dakle, za sve brojeve oblika $n = 4k-1$, ($k \in \mathbf{N}$) broj $2n$ dijeli zbroj prvih n prirodnih brojeva.

b) Slično kao u prethodnom slučaju pretpostavimo

$$(2n+1)|\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = (2n+1)\cdot t, t\in \mathbf{N}.$$

Tada je $n^2 + (1-4t)n - 2t = 0$ tj.

$$n_{1,2} = \frac{4t-1\pm\sqrt{16t^2+1}}{2}$$

Kako je n prirodan broj, to je broj $16t^2+1$ potpun kvadrat nekog cjelog broja, odnosno $16t^2+1 = l^2$, $l \in \mathbf{Z}$. Slijedi

$$l^2-(4t)^2=1 \Leftrightarrow (l-4t)(l+4t)=1\cdot 1=(-1)(-1).$$

Lako se vidi da je jedino rješenje $t = 0$, odnosno $n_1 = 0$ i $n_2 = -1$, pa traženi prirodni brojevi ne postoje.

Jasna Vilić (4),
Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

2966. *Za članove niza nenegativnih racionalnih brojeva a_1, a_2, a_3, ... vrijedi $a_m + a_n = a_{mn}$, za svake $m, n \in \mathbf{N}$. Dokaži da među njima postoje barem dva jednaka broja.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno tj. da su svaka dva člana niza međusobno različiti brojevi.

Za $m = n = 1$ dobivamo $a_1 + a_1 = a_1$ tj. $a_1 = 0$. Zato su svi ostali članovi različiti od nule.

Neka je $a_2 = \frac{p}{q}$, $a_3 = \frac{r}{s}$. Primijetimo da iz danog uvjeta slijedi $a_{m^k} = ka_m$. Odavde je

$$a_{2^{qr}}=qr\cdot a_2=qr\cdot\frac{p}{q}=pr=ps\cdot\frac{r}{s}=ps\cdot a_3=a_{3^{ps}},$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom $2^{qr} \neq 3^{ps}$.

Ur.

2967. *Riješi logaritamsku nejednadžbu*

$$\log_{x^2}(2+x) < \log_{x^2} x^2.$$

Rješenje. Dana nejednadžba je definirana ako je $x^2 \neq 1$, $x^2 \neq 0$, $2+x > 0$, odnosno $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x > -2$.

Razlikovat ćemo dva slučaja:

1° $x^2 > 1$ tj. $x > 1$ ili $x < -1$:

$$\log_{x^2}(2+x) < \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow 0 < 2+x < x^2$$

Sada je

$$x > -2, x^2-x-2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0$$
$$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle.$$

U ovom slučaju rješenje je $R_1 = \langle -2, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

2° $0 < x^2 < 1$ tj. $0 < x < 1$ ili $-1 < x < 0$:

$$\log_{x^2}(2+x) < \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow 2+x > x^2 > 0$$
$$x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) < 0$$
$$\Rightarrow x \in \langle -1, 2\rangle.$$

Dobivamo $R_2 = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$

Konačno, rješenje je $R = R_1 \cup R_2$ odnosno, $R = \langle -2, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$

Jasna Vilić (4), Sarajevo

2968. *Odredi broj nepraznih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ od kojih nikoji ne sadrži dva susjedna broja.*

Rješenje. Označimo s f_n traženi broj. Lako je vidjeti da je $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 4$. Podijelimo podskupove od S_n koji ne sadrže uzastopne brojeve u dvije grupe: one koji sadrže element n i one koji ga ne sadrže. Očito je broj podskupova druge grupe f_{n-1}.

Neka je T skup prve grupe. Tada je ili $T = \{n\}$, ili $T = \{a_1, \ldots, a_{k-1}, \ldots a_n\}$, gdje je $k > 1$. Jasno je $a_{k-1} \neq n-1$, pa je $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \subset S_{n-2}$, što znači da je broj podskupova druge grupe $f_{n-2}+1$ (može biti i $\emptyset$). Dakle,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1.$$

Stavljajući $u_n = f_n + 1$, dobivamo $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geqslant 3$. Dakle niz $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je niz Fibonaccijevih brojeva počevši od trećeg člana, zato je

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)-1,$$
$$n \in \mathbf{N}.$$

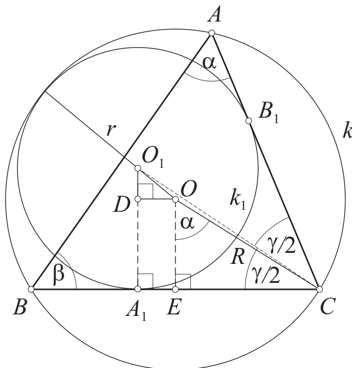
Ur.

2969. *U kružnicu k upisan je trokut ABC. Kružnica k_1 dodiruje kružnicu k i redom stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama B_1 i A_1. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i s njegov poluopseg, dokaži*

$$|CA_1| = \frac{ab}{s}.$$

(Koristi identitet: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.*)*

Rješenje.



Neka su R i r polumjeri kružnica k i k_1, a O i O_1 njihova središta. Tada sa slike dobivamo:

$$|OO_1| = R - r, \qquad (1)$$

$$|O_1D| = r - R\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$|OD| = |CA_1| - |CE| = |CA_1| - R\sin\alpha, \qquad (3)$$

$$|O_1A_1| = r = |CA_1| \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

Za pravokutan trokut OO_1D vrijedi

$$|OO_1|^2 = |O_1D|^2 + |OD|^2$$

tj. zbog (1)–(3)

$$(R-r)^2 = (r - R\cos\alpha)^2 + (|CA_1| - R\sin\alpha)^2,$$

odakle sređivanjem slijedi

$$|CA_1|^2 - 2R\sin\alpha \cdot |CA_1| + 2rR(1-\cos\alpha) = 0,$$

a iz (4):

$$|CA_1| = 2R\sin\alpha - 2R(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Sada je

$$|CA_1| = \frac{ab}{s} = \frac{2ab}{a+b+c}, \qquad (5)$$

ekvivalentno s

$$2R\sin\alpha - 2R(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b+c}.$$

Iz poučka o sinusima $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ slijedi

$$\sin\alpha - (1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Odavde se redom sređivanjem dobiva

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

odakle je, zbog $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\beta}{2}$,

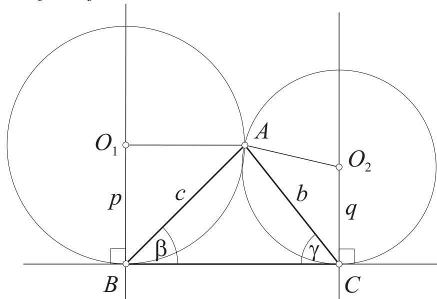
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Kako ovaj identitet vrijedi, istinita je i tražena tvrdnja (5).

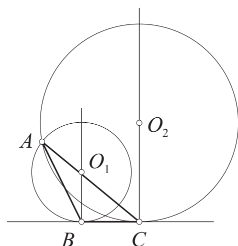
Ur.

2970. *Neka su p i q polumjeri dviju kružnica kroz vrh A trokuta ABC koje dodiruju BC u točkama B i C. Dokaži da je $pq = R^2$, gdje je R polumjer tom trokutu opisane kružnice.*

Rješenje.



Slika 1. $\measuredangle O_1BA = \frac{\pi}{2} - \beta$



Slika 2. $\sphericalangle O_1BA = \beta - \dfrac{\pi}{2}$

$$\sphericalangle O_1BA = \left|\frac{\pi}{2} - \beta\right|, \qquad \text{(vidi sl. 1. i sl. 2.)}$$

$$\frac{c}{2} = p\cos\sphericalangle O_1BA = p\sin\beta = p\cdot\frac{b}{2R}$$

$$\Rightarrow p = R\cdot\frac{c}{b}$$

$$\sphericalangle ACO_2 = \left|\frac{\pi}{2} - \gamma\right|$$

$$\frac{b}{2} = q\cos\sphericalangle ACO_2 = q\sin\gamma = q\cdot\frac{c}{2R}$$

$$\Rightarrow q = \frac{b}{c}\cdot R.$$

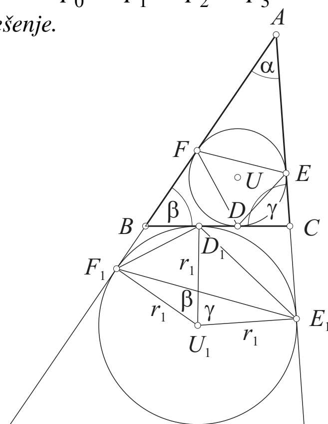
Slijedi $pq = R^2$.

Ur.

2971. *Kružnica polumjera r upisana trokutu ABC dodiruje njegove stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u D, E i F. Tom trokutu su pripisane kružnice k_1, k_2 i k_3. Kružnica k_1 dodiruje BC, CA i AB u D_1, E_1 i F_1; kružnica k_2 dodiruje CA, AB i BC u D_2, E_2 i F_2; kružnica k_3 dodiruje AB, BC i CA u D_3, E_3 i F_3. Neka su P_0, P_i, $i = 1, 2, 3$ površine trokuta DEF, $D_iE_iF_i$, $i = 1, 2, 3$. Dokaži jednakost*

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3}.$$

Rješenje.



$$\begin{aligned}
P_1 &= P(D_1U_1E_1) + P(D_1U_1F_1) - P(E_1U_1F_1)\\
&= \frac{r_1^2}{2}\sin\gamma + \frac{r_1^2}{2}\sin\beta - \frac{r_1^2}{2}\sin(\beta+\gamma)\\
&= \frac{r_1^2}{2}(\sin\gamma + \sin\beta - \sin\alpha)\\
&= \frac{r_1^2}{2}\,\frac{b+c-a}{2R} = \frac{r_1}{2}\cdot\frac{r_1(s-a)}{R} = \frac{r_1P}{2R}
\end{aligned}$$

tj.

$$\frac{P}{P_1} = \frac{2R}{r_1},$$

(R je polumjer trokutu ABC opisane kružnice, a P je njegova površina).

Slično se dobije

$$\frac{P}{P_2} = \frac{2R}{r_2}, \quad \frac{P}{P_3} = \frac{2R}{r_3}, \quad \frac{P}{P_0} = \frac{2R}{r}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{P}{P_1} + \frac{P}{P_2} + \frac{P}{P_3} &= 2R\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)\\
&= 2R\left(\frac{s-a}{P} + \frac{s-b}{P} + \frac{s-c}{P}\right)
\end{aligned}$$

$$2R\cdot\frac{3s-(a+b+c)}{P} = 2R\cdot\frac{s}{P} = \frac{2R}{r} = \frac{P}{P_0}.$$

Odavde slijedi tražena jednakost.

Ur.

2972. *Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi koji zdovoljavaju uvjet*

$$a+b+c \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Dokaži nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a + b + c.$$

Rješenje. Prvo se uvjerimo da vrijedi nejednakost:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{abc(a+b+c)^2}{ab+bc+ac} \qquad (1)$$

(uz uvjet $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) odnosno

$$(a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ac) \geqslant abc(a+b+c)^2.$$

Nakon sređivanja dobivamo izraz

$$a(b^2-c^2)^2 + b(c^2-a^2)^2 + c(a^2-b^2)^2$$

što je očito veće ili jednako nuli, pa stoga nejednakost (1) vrijedi.

Sada iz uvjeta zadatka slijedi

$$a+b+c \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

tj.

$$abc \geqslant \frac{(ab+bc+ac)}{a+b+c} \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a+b+c.$$

Goran Šeketa (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac

2973. *Ako je* $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ *dokaži da vrijedi*

$$\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\,\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\,\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

Rješenje. Kako je $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}(\pi-\gamma)\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{ctg}\gamma\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}+\operatorname{ctg}\gamma=0\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1+\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=0\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=1.
\end{aligned}$$

Jasna Vilić (4), Sarajevo

2974. *Ako polinom* $P(x)$ *stupnja n poprima cjelobrojne vrijednosti za* $x\in\{k, k+1,\ldots,k+n\}$, *gdje je* k *dani prirodni broj, dokaži da on poprima cjelobrojne vrijednosti za sve cijele brojeve* x.

Rješenje. Dovoljno je dokazati da su koeficijenti polinoma $P(x)$ cjelobrojni.

Polinom $P(x)$ zadan je s

$$P(x)=a_0'+a_1'x+a_2'x^2+\ldots+a_n'x^n,$$

a možemo ga napisati i u obliku

$$P(x)=a_0+a_1\frac{x-k}{1!}+a_2\frac{(x-k)(x-k-1)}{2!}+\ldots+a_n\frac{(x-k)(x-k-1)\ldots(x-k-n+1)}{n!}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
&P(k)=a_0\in\mathbf{Z},\\
&P(k+1)=a_0+a_1\in\mathbf{Z}\Rightarrow a_1\in\mathbf{Z},\\
&P(k+2)=a_0+2a_1+a_2\in\mathbf{Z}\Rightarrow a_2\in\mathbf{Z},\\
&\vdots\\
&P(k+l)=a_0+\binom{l}{1}a_1+\binom{l}{2}a_2+\ldots+\binom{l}{l-1}a_{l-1}+a_l\in\mathbf{Z}\Rightarrow a_l\in\mathbf{Z},\\
&\vdots\\
&P(k+n)=a_0+\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}a_2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}+a_n\in\mathbf{Z}\Rightarrow a_n\in\mathbf{Z},
\end{aligned}$$

Za neki $x\in\mathbf{Z}$ i neki $l=k,k+1,\ldots,k+n$ je

$$\binom{x}{l}=\frac{x(x-1)\ldots(x-l+1)}{l!}\in\mathbf{Z}.$$

Ur.

2975. *Neka su* x, a, b, c, d, e, f *realni brojevi. Pokaži da je*

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & c\\ -a & x & d & e\\ -b & -d & x & f\\ -c & -e & -f & x\end{vmatrix}\geq 0.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & c\\ -a & x & d & e\\ -b & -d & x & f\\ -c & -e & -f & x\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & d & e\\ -d & x & f\\ -e & -f & x\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} -a & d & e\\ -b & x & f\\ -c & -f & x\end{vmatrix}$$

$$+b\begin{vmatrix} -a & x & e\\ -b & -d & f\\ -c & -e & x\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} -a & x & d\\ -b & -d & x\\ -c & -e & -f\end{vmatrix}$$

$$=x\left(x\begin{vmatrix} x & f\\ -f & x\end{vmatrix}+d\begin{vmatrix} d & e\\ -f & x\end{vmatrix}\right.$$

$$-e\begin{vmatrix} d & e \\ x & f \end{vmatrix}\Bigg) - a\left(-a\begin{vmatrix} x & f \\ -f & x \end{vmatrix}\right.$$

$$+b\begin{vmatrix} d & e \\ -f & x \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} d & e \\ x & f \end{vmatrix}\Bigg)$$

$$+b\left(-a\begin{vmatrix} -d & f \\ -e & x \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} x & e \\ -e & x \end{vmatrix}\right.$$

$$-c\begin{vmatrix} x & e \\ -d & f \end{vmatrix}\Bigg) - c\left(-a\begin{vmatrix} -d & x \\ -e & -f \end{vmatrix}\right.$$

$$+b\begin{vmatrix} x & d \\ -e & -f \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} x & d \\ -d & x \end{vmatrix}\Bigg)$$

$$= x^4 + x^2f^2 + x^2d^2 + x^2e^2 + x^2a^2 + x^2b^2$$
$$+ x^2c^2 + a^2f^2 - 2abef + 2acdf + b^2e^2$$
$$- 2bcde + c^2d^2$$
$$= x^4 + x^2(a^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2) + a^2f^2$$
$$- 2abef + b^2e^2 + 2acdf - 2bcde + c^2d^2$$
$$= x^4 + x^2(a^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2)$$
$$+ (af - be)^2 + 2cd(af - be) + c^2d^2$$
$$= x^4 + x^2(a^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2)$$
$$+ (af - be + cd)^2 \geqslant 0,$$

čime smo dokazali traženo.

Mislav Cvitković (4),
Franjevačka klasična gimnazija, Sinj

2976. *Odredi funkcije* $f, g, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *sa svojstvom*

$$(h \circ g \circ f)(x + y + z) + (g \circ f)(y + z) + f(z) = x + 2y + 3z. \quad (1)$$

Rješenje. Za $x = y = 0$ iz (1) $\Rightarrow$

$$(h \circ g \circ f)(z) + (g \circ f)(z) + f(z) = 3z. \quad (2)$$

Za $x = 0$ iz (1) $\Rightarrow$

$$(h\circ g\circ f)(y+z)+(g\circ f)(y+z)+f(z) = 2y+3z. \quad (3)$$

tj.

$$(h\circ g\circ f)(z)+(g\circ f)(z)+f(z-y) = 3z-y. \quad (4)$$

Iz (2) i (4) $\Rightarrow$

$$f(z) - f(z - y) = y. \quad (5)$$

Iz (5) za $z = y \Rightarrow$

$$f(z) = z + f(0). \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (1) za $z = 0$ se dobiva

$$(h\circ g)(x+y+f(0))+g(y+f(0))+f(0) = x+2y. \quad (7)$$

Iz (7) za $y = 0 \Rightarrow$

$$(h \circ g)(x + f(0)) + g(f(0)) + f(0) = x, \quad (8)$$

a iz $x = 0 \Rightarrow$

$$(h\circ g)(y+f(0))+g(y+f(0))+f(0) = 2y \quad (9)$$

tj.

$$(h \circ g)(x + f(0)) + g(x + f(0)) + f(0) = 2x. \quad (10)$$

Oduzimanjem (10) od (8) slijedi

$$g(x + f(0)) - g(f(0)) = x \quad (11)$$

tj.

$$g(x) = x - f(0) + g(f(0)). \quad (12)$$

Uvrštavanjem (6) i (12) u (1) za $x = y = 0 \Rightarrow$

$$h(z) = z - f(0) - 2g(f(0)). \quad (13)$$

Iz (6), (12), (13) i (1) slijedi

$$f(x) = x + C$$
$$g(x) = x - C + C_1$$
$$h(x) = x - C - 2C_1$$

gdje su C i $C_1 \in \mathbf{R}$ po volji odabrana konstanta.

Ur.

2977. *Dan je skup od* $4n$ *pozitivnih brojeva. Poznato je da se svaka četiri različita broja mogu poredati tako da budu članovi geometrijskog niza. Dokaži da u tom skupu ima barem* n *jednakih brojeva.*

Rješenje. Neka je a_1 najmanji broj koji sudjeluje u izgradnji nekog geometrijskog niza.

Neka su a_1, a_2, a_3 tri člana nekog geometrijskog niza:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q.$$

Svaki broj $a_4 \neq a_1, a_2, a_3$ čini s ova tri početak geometrijskog niza, pri čemu a_4 mora biti poslije a_3. (Ako bi a_4 bio između a_1 i a_2, tada bi bilo $\frac{a_4}{a_1} = \frac{a_2}{a_4} = \frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_4 = qa_1 = a_2$, što je u suprotnosti s pretpostavkom).

Svaki a_i koji s a_1, a_2, a_3 gradi geometrijski niz je jednak a_4. Ako s a_1, a_2, a_3 ne gradi geometrijski niz, onda je jednak jednom od a_1, a_2, a_3.

Definiramo četiri skupa:

$$A_i = \{a_j | a_j = a_i\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Svaki broj je u jednom od ova četiri skupa. Oni ili svi sadrže po n elemenata ili postoji neki koji ima više od n elemenata.

Ur.

2978. *Iz kutije u kojoj se nalazi n kuglica, na slučajan način izaberemo nekoliko njih. Kolika je vjerojatnost da je broj izabranih kuglica paran?*

Rješenje. S jednakom vjerojatnošću možemo izvući jednu, dvije, tri,... ili n kuglica. Broj ovih mogućnosti je $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$, a poznato je da je

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

pa je

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Broj slučajeva u kojima je izabran paran broj kuglica je $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots$. Također je zbog

$$0=(1-1)^n=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots\right] - \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}+\ldots\right],$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}+\ldots = 2^{n-1}.$$

pa je $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots = 2^{n-1} - 1$. Vjerojatnost da ćemo izabrati paran broj kuglica je $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$.

Jasna Vilić (4), Sarajevo

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 238. *U tvornici se proizvode sapuni u obliku kvadra dimenzija* $9\,cm \times 5\,cm \times 3\,cm$ *gustoće* $1.1\,g/cm^3$*. Kolika je najveća masa sapuna što se može složiti u kutiju dimenzija* $54\,cm \times 35\,cm \times 36\,cm$*?*

Prvo rješenje

Dijeljenjem dužine, širine i visine kutije s dužinom, širinom i visinom sapuna, dobivamo cijeli broj. To znači da kutiju možemo popuniti komadima sapuna u potpunosti.

$a = 54\,\mathrm{cm}$

$b = 35\,\mathrm{cm}$

$c = 36\,\mathrm{cm}$

$\rho = 1.1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

m=?

$$V_k = a \cdot b \cdot c = 54\,\mathrm{cm} \cdot 35\,\mathrm{cm} \cdot 36\,\mathrm{cm} = 68\,040\,\mathrm{cm}^3$$

$$m = V_k \cdot \rho = 68\,040\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1.1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 74\,844\,\mathrm{g} = 74.844\,\mathrm{kg}.$$

Vanja Ubović (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje

Drugo rješenje

$$V_{\text{sapuna}} = 9\,\text{cm}\cdot 5\,\text{cm}\cdot 3\,\text{cm} = 135\,\text{cm}^3$$
$$\rho_{\text{sapuna}} = 1.1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$
$$V_{\text{kutije}} = 54\,\text{cm}\cdot 35\,\text{cm}\cdot 36\,\text{cm} = 68\,040\,\text{cm}^3$$

$$m_{\text{sapuna}} = ?$$

Broj sapuna u kutiji:

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{68\,040\,\text{cm}^3}{135\,\text{cm}^3} = 504.$$

Masa jednog sapuna:

$$\text{masa}_1 = \rho_s\cdot V_s = 1.1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\cdot 135\,\text{cm}^3 = 148.5\,\text{g}.$$

Masa svih sapuna:

$$\text{broj sapuna}\cdot\text{masa}_1 = 504\cdot 148.5\text{g} = 74\,844\text{g} = 74.844\text{kg}.$$

Najveća masa sapuna što se može složiti u kutiju je 74.844 kg.

Marija Čelar (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 239. *Tijekom normalnog govora zvučni val proizvodi tlak od* $20\,mPa$ *na bubnjić u uhu. Kolika je sila na bubnjić ako je njegova površina* $0.52\,cm^2$*? Ta sila se prenosi prema pužnici preko koščica koje djeluju kao poluga. Krak te "poluge" prema bubnjiću je 1.5 puta kraći nego prema pužnici. Kolika je sila koja djeluje na otvor pužnice? Površina otvora pužnice je* $0.026\,cm^2$*. Koliki se tlak prenosi na tekućinu u pužnici?*

Rješenje.

$$p_{\text{bubnjić}} = 20\,\text{mPa} = 0.02\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$
$$S_{\text{bubnjić}} = 0.52\,\text{cm}^2 = 0.000052\,\text{m}^2$$
$$p_b = \frac{F}{S_b} \Rightarrow F = p_b\cdot S_b$$
$$F = 0.02\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 0.000052\,\text{m}^2 = 0.000001\,\text{N} = 0.001\,\text{mN}$$

Sila na bubnjić je 0.001 N.

$$k_2 = 1.5k_1$$
$$F_1 = 0.001\,\text{mN}$$

$$F_2 = ?$$
$$F_1\cdot k_1 = F_2\cdot k_2$$
$$0.001\,\text{mN}\cdot k_1 = F_2\cdot 1.5k_1$$
$$1.5\cdot F_2 = 0.001\,\text{mN}$$
$$F_2 = 0.00067\,\text{mN}$$

Sila koja djeluje na krak prema pužnici iznosi 0.00067 mN.

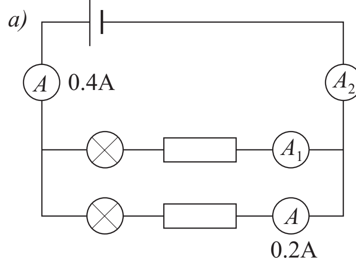
$$F_{\text{pužnica}} = 0.00067\,\text{mN} = 0.00000067\,\text{N}$$
$$S_{\text{pužnica}} = 0.026\,\text{cm}^2 = 0.0000026\,\text{m}^2$$
$$p_{\text{pužnica}} = ?$$
$$p_p = \frac{F_p}{S_p} = \frac{0.00000067\,\text{N}}{0.0000026\,\text{m}^2} = 0.257\,\text{Pa}$$

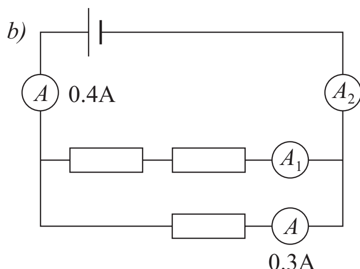
Tlak na tekućinu u pužnici je 0.257 Pa.

Marija Čelar (8), Šibenik

OŠ – 240. *Karla je sastavila strujni krug kao na slici a), a Lea kao na slici b). Svaka od njih ima samo dva ampermetra pomoću kojih su očitale struje kao što je prikazano na slici. Kolike će vrijednosti struje očitati Karla i Lea nakon što premjeste ampermetre na mjesta* A_1 *i* A_2 *u strujnom krugu?*

Rješenje.





a) Ako je Karla na mjestu A očitala vrijednost struje od 0.4 A onda će na mjestu A_2 također očitati vrijednost od 0.4 A. Zbroj jakosti struja u paralelnom spoju mora biti jednak jakosti struje prije i poslije grananja. Iz toga slijedi da je $A_1 = 0.2\,\text{A}$.

b) Ako je Lea na mjestu A očitala vrijednost struje od 0.4 A onda će na mjestu A_2 također očitati vrijednost 0.4 A jer je u serijskom spoju $I =$ konst. Ampermetar na A_1 pokazuje 0.1 A iz istog razloga kao u slučaju a).

Vanja Ubović (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje

OŠ – 241. *Matija vozi bicikl, a Andrija trči uz obalu Drave. U jednom trenutku su udaljeni* 360 m *i gibaju se jedan prema drugom. Matija se giba tri puta većom brzinom od Andrije. Ako se susretnu za 1 min, koliko će biti udaljeni za 3 min? Kojom brzinom Matija vozi bicikl? Kojom brzinom Andrija trči?*

Rješenje.

$$s = 360\,\text{m}$$
$$v_1 = 3v_2$$
$$t_1 = 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$$
$$t_2 = 3\,\text{min} = 180\,\text{s}$$

$$v_1 = ?$$
$$v_2 = ?$$
$$s' = ?$$

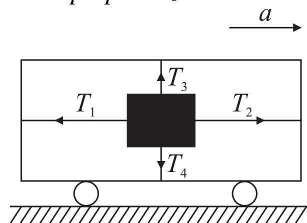
s – početna udaljenost
s' – udaljenost nakon 3 minute
v_1 – Matijina brzina
v_2 – Andrijina brzina

$$s = s_1 + s_2$$
$$s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_1$$
$$s = 3v_2 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_1$$
$$s = 4v_2 \cdot t_1$$
$$v_2 = \frac{s}{4t_1} = \frac{360\,\text{m}}{4 \cdot 60\,\text{s}} = 1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_1 = 3v_2 = 4.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$t = t_2 - t_1 = 120\,\text{s}$$
$$s' = t(v_1 + v_2)$$
$$s' = 120\,\text{s} \cdot 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$s' = 720\,\text{m}$$

Matija vozi bicikl brzinom 4.5 m/s, a Andrija trči brzinom 1.5 m/s. Za 3 min će biti udaljeni 720 m.

Vanja Ubović (8), Gornje Bazje

1322. *Tijelo je pomoću četiri niti vezano za kolica kao na slici. Sile zatezanja niti su* T_1, T_2, T_3 *i* T_4. *Kolikim ubrzanjem se kreću kolica po podlozi?*



Rješenje. Na osnovi II. Newtonovog zakona mehanike za gibanje po ravnoj podlozi vrijedi
$$M_a = T_2 - T_1,$$
gdje je M masa tijela, a ubrzanje. U okomitom smjeru na podlogu, tijelo miruje pa je
$$T_3 = M_g + T_4,$$
odnosno
$$M_g = T_3 - T_4.$$
Rješavanjem predhodnih jednadžbi dobije se ubrzanje tijela
$$a = g \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}.$$

Tijelo je vezano za kolica, pa se ona gibaju istim ubrzanjem kao i tijelo.

Ur.

1323. *Materijalna točka se giba po krugu polumjera $R = 4$ m brzinom koja se u vremenu mijenja po zakonu $v = A + Bt$, gdje je $A = 2$ m/s i $B = 1$ m/s^2. Naći tangencijalno, okomito i ukupno ubrzanje materijalne točke u trenutku kada ona opiše kut $\theta = \pi/4$.*

Rješenje. Pošto brzina materijalne točke linearno ovisi o vremenu, tangencijalno ubrzanje je konstatno i iznosi $a_t = B$. Veza između brzine i prijeđenog puta u slučaju konstantnog ubrzanja je

$$v_2 = v_0^2 + 2as.$$

U našem slučaju to znači

$$v^2 = A^2 + 2a_t s.$$

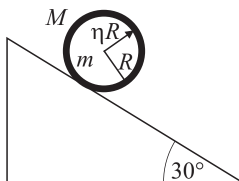
U trenutku kada materijalna točka prebriše kut θ njen prijeđeni put je $s = R\theta$, okomita komponenta ubrzanja je $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{A^2 + 2BR\theta}{R}$, tako da ukupno ubrzanje

$$a=(a_t^2+a_n^2)^{\frac{1}{2}}=\left\{B^2+\left[\frac{(A^2+2BR\theta)^2}{R^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ako uvrstimo brojne vrijednosti dobije se: $a_t = 1\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a_n = 2.57\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a = 2.76\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Ur.

1324. *Bačva mase M napunjena naftom mase m kotrlja se niz kosinu kuta nagiba 30° (vidi sliku). Bačva se može smatrati šupljim valjkom s tankim bazama napravljenim od homogenog materijala. Vanjski polumjer šupljeg valjka je R, a unutarnji ηR $(\eta < 1)$. Odredite ubrzanje bačve. Trenje između zidova bačve i nafte je zanemarivo malo. Pretpostavite da se bačva kotrlja bez proklizavanja niz kosinu. Također os simetrije bačve je paralelna horizontalnoj ravnini tokom gibanja.*



Rješenje. Moment inercije šupljeg valjka oko osi simetrije dobijemo ako od momenta inercije "cijelog" valjka mase $M + M_0$, gdje je M_0 masa "šupljeg dijela", oduzmemo moment inercije šupljeg dijela:

$$I = \frac{1}{2}(M + M_0)R^2 - \frac{1}{2}M_0\eta^2R^2.$$

Kako je $M_0 = M \cdot \dfrac{\eta^2R^2}{R_2 - \eta^2R^2}$, to je

$$I = \frac{1}{2}MR^2(1 + \eta^2).$$

Translacija bačve s naftom niz kosinu opisana je jednadžbom

$$(M + m)a = \frac{1}{2}(M + m)g - F_t,$$

gdje je F_t sila trenja kotrljanja. Kako je trenje između nafte i bačve zanemarivo, rotira samo bačva, to je jednadžba za rotaciju bačve

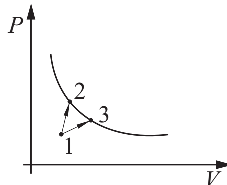
$$I\alpha = F_tR.$$

Kako nema proklizavanja bačve to je $a = \alpha R$ i ubrzanje

$$a = \frac{g(M + m)}{(3 + \eta^2)M + 2m}.$$

Ur.

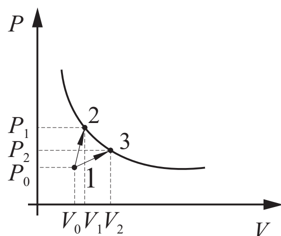
1325. *Plin se zagrije iz istog početnog stanja, na načine prikazane na slici strelicama $1 \to 2$ i $1 \to 3$ do iste konačne temperature. Koji od ova dva procesa zahtijeva veću količinu topline?*



Rješenje.

Proces $1 \to 2$: količina topline $\Delta Q = \Delta U_1 + W_1$, $W_1 = \dfrac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_1 - V_0)$.

Proces $1 \to 3$: $\Delta Q_2 = \Delta U_2 + W_2$, $W_2 = \dfrac{1}{2}(p_0 + p_2)(V_2 - V_0)$.



Pošto su konačne temperature plina u stanjima 2 i 3 jednake $\Delta U_1 = \Delta U_2$. Znači treba usporediti radove: $W_2 - W_1 = \frac{1}{2}[(p_0V_2 - p_0V_1) + (p_1V_0 - p_2V_0)] > 0$ jer je $p_0V_1 < p_0V_2$ i $p_2V_0 < p_1V_0$. Znači $\Delta Q_2 > \Delta Q_1$ tj. u *procesu* $1 \to 3$ plinu se preda više topline.

Ur.

1326. *Relativistički proton kinetičke energije E sudara se elastično s protonom koji miruje. Nakon sudara protoni se razlete simetrično s obzirom na pravac gibanja prvog protona prije sudara. Odredite kut pod kojim su se razletjeli protoni poslije sudara.*

Rješenje. Iz zakona održanja impulsa slijedi:

$$p_1 \sin\frac{\theta}{2} = p_2 \sin\frac{\theta}{2}$$

i

$$p = p_1 \cos\frac{\theta}{2} + p_2 \cos\frac{\theta}{2},$$

odakle je

$$p_1 = p_2 = p' \quad \text{i} \quad p' = \frac{p}{2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Zakon održanja energije glasi:

$$E = E_1 + E_2 = 2E', \quad \text{tj.} \quad E' = \frac{E}{2}.$$

Ako se iskoristi relacija

$$p^2c^2 = E(E + 2mc^2),$$

dobije se:

$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{E(E+2mc^2)}{E'+2mc^2} = 4 \cdot \frac{E+2mc2}{E+4mc2}$$

Dakle kut pod kojim su se razletjeli protoni poslije sudara je:

$$\cos\theta = \frac{E}{E+4mc^2}.$$

Ur.

1327. *Dva jednaka pločasta kondenzatora spojena su paralelno i nabijena nabojem $q = 40\,\mu C$. U trenutku $t = 0$ udaljenost između ploča prvog kondenzatora jednoliko se povećava po zakonu $d_1 = d_0 + vt$, a udaljenost između ploča drugog se smanjuje po zakonu $d_2 = d_0 - vt$ pri čemu je $d_0 = 2$ mm, a $v = 0.1$ mm/s. Zanemarujući otpor spojnih žica naći jakost struje koja kroz njih protječe za vrijeme dok se ploče kondenzatora gibaju.*

Rješenje. Ako su q_1 i q_2 količine naboja na prvom i drugom kondenzatoru, vrijedi

$$q_1 + q_2 = q \quad \text{i} \quad U_1 = U_2, \quad \text{tj.} \quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}.$$

Pošto je

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + vt} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 - vt}$$

to je

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{d_0 - vt}{d_0 + vt}.$$

Ako se izračunaju količine naboja na svakom kondenzatoru dobije se:

$$q_1 = \frac{q(d_0 - vt)}{2d_0} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{q(d_0 + vt)}{2d_0}.$$

Smanjenje količine naboja na prvom kondenzatoru jednako je povečanju količine naboja na drugom. Jakost struje iznosi

$$I = -\frac{\Delta q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = \frac{qv}{2d_0} = 1\mu A.$$

Ur.

1328. *U bajci o relativističkim metlama, tri vještice K, L i M ispituju svoje moći telepatskog određivanja pulsa. Veštica K miruje, dok se vještice L i M gibaju na relativističkim metlama konstantnim brzinama duž istog pravca. Vještica K kaže da je njen puls 75 otkucaja u minuti, a da puls vještice L iznosi 60 otkucaja u minuti. Vještica L tvrdi obrnuto, tj. da je njen puls 75 otkucaja u minuti, a da puls vještice K iznosi 60 otkucaja u minuti. Vještica M kaže da vještice K i L imaju jednak puls. Odredite brzine vještica L i M u odnosu na vješticu K, ako je poznato da se ni u bajkama vještice ne gibaju brže od svjetlosti.*

Rješenje. Omjer broja otkucaja N i vremena otkucaja t isti je kod svih triju vještica:

$$\frac{N_K}{t_K} = \frac{N_L}{t_L} = \frac{N_M}{t_M}.$$

Promotrimo najprije vještice K i L. Gledano iz sustava K, vrijeme u sustavu L teče sporije jer se giba u odnosu na K, pa je (po formuli za vremensku dilataciju)

$$t_K = \frac{t_L}{\sqrt{1-\frac{v_L^2}{c^2}}}.$$

Uvrstimo to u prethodni omjer:

$$N_K \cdot t_K\sqrt{1-\frac{v_L^2}{c^2}} = N_L \cdot t_K \Rightarrow$$

$$v_L = \sqrt{c^2\left[1-\left(\frac{N_L}{N_K}\right)^2\right]} = 0.6c$$

$$= 1.8 \cdot 10^8 \quad \mathrm{m/s}.$$

Nadalje, vještici M vrijeme, gledano iz njezina sustava, protječe "jednako" u sustavima K i L, što zmači da se prema svakom od njih mora gibati jednakom brzinom. Da bi to postigla, budući da vještica K miruje, vještica M mora se gibati u smjeru suprotnom smjeru brzine vještice L, i to brzinom $\frac{v_L}{2}$. Naime, gledano iz sustava M, tada se vještica K "giba" u odnosu na nju brzinom $\frac{v_L}{2}$, a istom se brzinom giba i vještica L. Dakle,

$$v_M = \frac{v_L}{2} = 0.3\,c = 9 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}.$$

Mislav Cvitković (4),
Franjevačka klasična gimnazija, Sinj

Rješenja zabavne matematike

Broj 2006

$9 + 8 + 7 + 654 \cdot 3 + 2 \cdot 10 = 2006$.

Pravokutni trokuti

Na crtežu su 52 pravokutna trokuta.

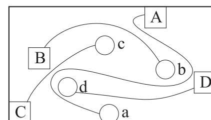
U muzeju

Problem se može riješiti razmatranjem triju prelaženja posjetilaca iz dvorane u dvoranu, počevši od kraja. Tako je prije trećeg prelaženja u drugoj dvorani očito bilo 30 posjetilaca, u trećoj 33 posjetilaca (30 posjetilaca na kraju je $10/11$ toga broja), a u prvoj 27 posjetilaca itd. Brojevi posjetilaca u dvoranama na početku su redom 36, 27, 27.

Mala piramida

Ima 39 rješenja. U lik piramide upisuju se sljedeće trojke brojeva: (1, 25, 784), (1, 36, 289), (1, 36, 529), (1, 36, 729), (1, 36, 784), (1, 49, 256), (1, 49, 324), (1, 49, 576), (1, 49, 625), (1, 64, 289), (1, 64, 529), (1, 64, 729), (4, 16, 289), (4, 16, 529), (4, 16, 729), (4, 25, 169), (4, 25, 196), (4, 25, 361), (4, 25, 961), (4, 36, 289), (4, 36, 529), (4, 36, 729), (4, 81, 256), (4, 81,529), (4, 81, 576), (4, 81, 625), (4, 81, 729), (9, 16, 324), (9, 16, 784), (9, 25, 324), (9, 25, 361), (9, 25, 784), (9, 25, 841), (9, 36, 784), (9, 36, 841), (9, 81, 256), (9, 81, 324), (9, 81, 576), (9, 81, 625).

Staze



36. međunarodna fizička olimpijada 2005.

Hrvatska je i ove godine, uz potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa sudjelovala na Međunarodnoj fizičkoj olimpijadi. Na *Državnoj smotri i natjecanju mladih fizičara*, održanom u Gospiću od 12. do 15. svibnja 2005. g., izabrano je devet učenika koji su pozvani na dvotjedne pripreme u Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu od 29. 5. do 10. 6. 2005. Tijekom priprema izabrani su sljedeći učenici koji su predstavljali Hrvatsku na olimpijadi: *Alen Karabegović*, *Damjan Pelc* i *Marko Popović* iz V. gimnazije u Zagrebu, *Filip Kos* iz XV. gimnazije u Zagrebu te *Antonio Majdandžić* iz Gimnazije Frane Petrića u Zadru. Godine 2005. *36. međunarodna fizička olimpijada* održana je u Salamanci u Španjolskoj, od 3. do 12. srpnja 2005. godine, a sudjelovalo je više od tristo učenika iz 72 države. Naši učenici su pokazali izvrsno znanje i svi su bili nagrađeni: *Antonio Majdandžić* i *Damjan Pelc* su osvojili brončane medalje, a *Alen Karabegović*, *Filp Kos* i *Marko Popović* su dobili pohvale.

Izvannatjecateljski program je bio, također, vrlo bogat: od upoznavanja grada domaćina, srednjovjekovnoga grada s jednim od najstarijih sveučilišta u Europi (osnovan 1218.) do izleta u druge zanimljive gradove. Na programu su bili i flamenco, te Don Quijote. U toku Olimpijade *Anthony J. Leggett*, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 2003. godine održao je učenicima vrlo interesantno predavanje.

Singapur će od 08. do 17. srpnja 2006. godine biti domaćin 37. međunarodne fizičke olimpijade.

Krešo Zadro, Zagreb

⋆ ⋆ ⋆

Novosti o ranom svemiru

Matko Milin[1], *Zagreb*

Fizičari koji se bave istraživanjem ranog svemira nedavno su dobili novi važan eksperimentalan rezultat kojim mogu testirati postojeće teorije. Naime, NASA (od *engl.* National Aeronautics and Space Administration) je sredinom ožujka objavila rezultate dobivene trogodišnjim neprekidnim mjerenjem kozmičkog mikrovalnog zračenja pomoću satelita WMAP (od *engl.* Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Objavljeni rezultati su iznimno važni za razumijevanje razvoja svemira neposredno nakon Velikog praska (*engl.* Big Bang).

Kozmičko pozadinsko zračenje (o kojem smo već pisali u MFL-u broj 212 i 216) je elektromagnetsko zračenje koje jednoliko ispunjava svemir, a koje je nastalo otprilike 400 tisuća godina nakon Velikog praska, (kada se svemir dovoljno ohladio za nastanak prvih atoma i postao "proziran" za svjetlost kojom je bio ispunjen od prvih trenutaka). Širenjem svemira valna duljina tog zračenja postojala je sve veća da bi se ono danas vidjelo u mikrovalnom području, sa spektrom koji odgovara spektru crnog tijela temperature 2.725 K. Kozmičko pozadinsko zračnje je otkriveno 1965. godine (Penzias i Wilson su za to otkriće dobili Nobelovu nagradu 1978. godine), i to je otkriće tada bilo jedan od glavnih argumenta u prilog teorije Velikog praska.

Nedavna, sve preciznija mjerenja tog zračenja pomoću instrumenata postavljenih na satelite, dala su i daljnje senzacionalne rezultate. Tako su npr. pomoću sonde WMAP do 2002. godine izmjerene sitne temperaturne varijacije zračenja (milijunti dio Kelvina!) iz čega je zaključeno da je svemir star $\approx$ 13.7 milijardi godina te da se sastoji od 73 % tamne energije, 23 % tamne materije i 4 % tzv. barionske materije, tvari od koje smo načinjeni mi sami i najveći dio "vidljivog" svemira (za detalje vidjeti MFL broj 212). U međuvremenu, WMAP je nastavio mjerenja pozadinskog zračenja i nedavno objavljeni rezultati po prvi put daju informaciju i o njegovoj polarizaciji. Polarizacija, ili pojednostavljeno rečeno, usmjerenost titranja električnog i magnetskog polja u elektromagnetskom valu, govori o načinu na koji je zračenje nastalo te o njegovoj interakciji s materijom kroz koju prolazi ili se reflektira (npr. Sunčeva je svjetlost nakon refleksije na sjajnoj površini polarizirana). Dakle, mjerenje polarizacije kozmičkog pozadinskog zračenja dobivamo informaciju direktno iz vremena njegovog nastanka, kao i o načinu na koji je tijekom vremena modificirano pa time i o svojstvima materijala kroz koje je prolazilo.

Podaci za polariziranost omogućuju po prvi put eksperimentalno provjeru raznih modela vrlo ranog svemira. Dio teorije koji se njima posebno može testirati je tzv. kozmička inflacija. Riječ je o teoriji koju je originalno postavio Alan Guth 1981. godine, a koja tvrdi da je svemir neposredno nakon Velikog praska prošao kroz fazu eksponencijalno brzog širenja. Pri tom naglom napuhavanju ranog svemira, uvijek prisutne fluktuacije energije na kvantnom nivou narasle su do makroskopskih nehomogenosti materije, a one su opet dovele do nastanka galaksija i zvijezda (nastanak galaksija je nemoguć u posve homogenom svemiru jer nema gravitacijskog "sjemena" koje bi privuklo okolnu masu). Rezultati dobiveni WMAP-om daju snažnu podršku teoriji kozmičke inflacije i to njenom najjednostavnijem obliku koji predviđa da sjaj

[1] Autor je znanstveni suradnik u Laboratoriju za nuklearne reakcije Instituta Ruđer Bošković, mmilin@lnr.irb.hr

struktura viđenih u mapi kozmičkog pozadinskog zračenja opada s njihovom veličinom. U području gdje je svaki eksperimentalan (točnije: promatrački) rezultat dragocjen i zahtijeva ogroman trud, ovi rezultati svakako će dovesti do nastavka brzog napretka, prisutnog posljednjih desetak godina.

WMAP-ovi rezultati sadrže još jednu bitnu informaciju: budući da polarizacija kozmičkog pozadinskog zračenja ovisi o materiji kroz koju ono prolazi, moguće je zaključiti i to da su prve zvijezde nastale kada je svemir bio star oko 400 milijuna godina (a ne 250 milijuna kao što se mislilo do sada).

Dakako, WMAP će nastaviti mjerenja kozmičkog pozadinskog zračenja i narednih godina. Model kozmičke inflacije također predviđa prvobitne gravitacijske valove čiji utjecaj bi se trebao reflektirati u polarizaciji kozmičkog mikrovalnog zračenja. To, kao i druga istraživanja provodit će se i novim instrumentima na satelitima: ESA (od *engl.* European Space Agency) planira lansirati satelit "Planck" 2008. godine, a NASA razmatra lansiranje satelita "Inflation Probe". Obje ove sonde kao jedan od osnovnih ciljeva imaju preciznije mjerenje polarizacije kozmičkog mikrovalnog zračenja.

⋆ ⋆ ⋆



KVALIFIKACIJSKI ISPITI

Zadaci s prijemnog ispita iz matematike na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu 2005. g.

Donosimo tek manji dio zadataka namijenjenih svim zainteresiranim kandidatima koji se žele pripremiti za razredbeni (kvalifikacijski) ispit na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu i svim srodnim fakultetima u Hrvatskoj.

⋆ ⋆ ⋆

M-1. Izračunajte

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

M-2. Ako je $a>0$ i $(a^{-2}-2)^{-2}-2^{-2}=0$ tada broj a pripada intervalu
A. $<0, 0.3>$ **B.** $<0.3, 0.6>$ **C.** $<0.6, 0.9>$ **D.** $<0.9, 1.2>$

M-3. Ako je $x+\dfrac{1}{x}=3$ tada $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ iznosi
A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 9

M-4. Koliko različitih rješenja u skupu $\mathbf{R}^2$ ima jednadžba $x^2+y^2+2x-4y+5=0$?
A. nijedno **B.** jedno **C.** dva **D.** beskonačno mnogo

M-5. Skup svih rješenja nejednadžbe $|x|+|x+1|+|x+2|>1$ je
A. $\mathbf{R}$ **B.** $<-\infty, 0>$ **C.** $<0, +\infty>$ **D.** $<-1, 1>$

M-6. Ako je $f(2x+3) = 3x+2$ tada $f^{-1}(101)$ iznosi
A. 149 **B.** 101 **C.** 81 **D.** 69

M-7. Ako otapanjem 45 l leda nastane 40 l vode, koliko litara leda nastane smrzavanjem 72 l vode?
A. 80 **B.** 81 **C.** 82 **D.** 83

M-8. Opseg trokuta kojeg određuju pravci $5x + 12y - 32 = 0$, $3x - 4y - 8 = 0$, $x + 8 = 0$ iznosi
A. 36 **B.** 38 **C.** 40 **D.** 42

M-9. Izračunajte $\left(i^{101} + \dfrac{1}{i^{102}}\right)^{10}$
A. 32 **B.** -32 **C.** $32i$ **D.** $-32i$

M-10. Za koji realni k jednadžba $x^4 + kx^2 + k = 0$ nema realnih rješenja?
A. za sve k **B.** za pozitivne k **C.** za negativne k **D.** takav k ne postoji

M-11. Pravac $x + y = \lambda$ je tangenta kružnice $x^2 + y^2 = 100$ ako je
A. $\lambda = \pm 10$ **B.** $\lambda = \pm\sqrt{2}$ **C.** $\lambda = \pm 10\sqrt{2}$ **D.** $\lambda = \pm 2\sqrt{10}$

M-12. Koliki je zbroj svih rješenja jednadžbe $\log\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \log(x) - \log(100x^3) = 0$?
A. 1.1 **B.** 1.01 **C.** 0.11 **D.** 0.101

M-13. Koliko znamenaka ima broj 333^{333}?
A. 640 **B.** 740 **C.** 840 **D.** 940

M-14. Ako je polumjer kružnice opisane istokračnom pravokutnom trokutu za 4 cm veći od polumjera njemu upisane kružnice, tada kateta tog trokuta iznosi
A. 8 cm **B.** $4\sqrt{2} + 4$ cm **C.** $4\sqrt{2}$ cm **D.** 4 cm

M-15. Veliku metalnu kuglu promjera 2 metra pretalimo u 125 međusobno jednakih malih kugli. Koliko puta je ukupna površina svih malih kugli veća od površine polazne velike kugle?
A. 125 **B.** 25 **C.** 12.5 **D.** 5

M-16. Koliki je volumen pravilne četverostrane piramide brida 6 dm ako su joj svi bridovi iste duljine?
A. $36\sqrt{2}$ dm^3 **B.** $72\sqrt{2}$ dm^3 **C.** $108\sqrt{2}$ dm^3 **D.** $216\sqrt{2}$ dm^3

M-17. Koliko najmanje puta treba uzastopno baciti igraću kocku pa da vjerojatnost da se bar jednom pojavi broj 6 bude veća od 50%?
A. 3 puta **B.** 4 puta **C.** 5 puta **D.** 6 puta

M-18. U nekom je mjestu prosječna ljetna temperatura za 212.5% veća od prosječne zimske temperature. Kolika je prosječna zimska temperatura tog mjesta ako prosječna ljetna iznosi 22.5 °C?
A. 7.8 °C **B.** 7.6 °C **C.** 7.4 °C **D.** 7.2 °C

M-19. Glavnica od milijun kuna bila je 3 godine uložena uz 4% godišnjih dekurzivnih jednostavnih kamata. Za koliko kuna bi ukupne kamate bile veće da je obračun kamata bio složen?
A. 4486 **B.** 4684 **C.** 4648 **D.** 4864

M-20. U kojem omjeru treba miješati vruću vodu temperature 97 °C i hladnu temperature 2 °C da dobijemo vodu za kupanje temperature 27 °C?
A. 2 : 97 **B.** 10 : 27 **C.** 5 : 14 **D.** 7 : 20

M-21. Reducirajte izraz $\dfrac{x(1+x^{-1})^{-1}-(1+x)^{-1}+1}{x(1-x^{-1})^{-1}+(1-x)^{-1}-x}$
A. $1+x$ **B.** $(1+x)^{-1}$ **C.** x **D.** x^{-1}

M-22. Za koje vrijednosti realnih parametara a i b jednadžba $\dfrac{x+a}{a-b}=\dfrac{a-x}{a+b}$ ima beskonačno mnogo rješenja?
A. $a\neq 0,\ b=0$ **B.** $a=0,\ b\neq 0$ **C.** $a=0,\ b=0$ **D.** $a\neq 0,\ b\neq 0$

M-23. Ako bi putnički vlak od mjesta M do mjesta N vozio prosječnom brzinom 50 km/h kasnio bi 24 minute dok bi prosječnom brzinom 80 km/h stigao 30 minuta ranije od predviđenog vremena po redu vožnje. Kolika je međusobna udaljenost mjesta M i N?
A. 120 km **B.** 130 km **C.** 140 km **D.** 150 km

M-24. Jednadžba $|\,x+|x|\,|+|\,x-|x|\,|=1$ u skupu realnih brojeva ima
A. dva različita pozitivna rješenja **B.** dva različita negativna rješenja
C. jedno pozitivno i jedno negativno rješenje **D.** nema rješenja

M-25. Ako se unutarnji kutovi peterokuta odnose kao 3 : 5 : 2 : 11 : 6 tada zbroj najvećeg i najmanjeg kuta u tom peterokutu iznosi
A. 200° **B.** 220° **C.** 240° **D.** 260°

M-26. Inverzna funkcija funkcije $f(x)=\dfrac{1}{6}\log(100x^{-2})+1$ je
A. $f^{-1}(x)=10^{6x-2}$ **B.** $f^{-1}(x)=10^{6-2x}$
C. $f^{-1}(x)=10^{3x-4}$ **D.** $f^{-1}(x)=10^{4-3x}$

M-27. Koliki je koeficijent smjera pravca koji je okomit na pravac $2ay-a^2x+a+6y+9x-3=0,\ a\neq\pm3$?
A. $\dfrac{2}{a-3}$ **C.** $\dfrac{2}{3-a}$ **B.** $\dfrac{a-3}{2}$ **E.** $\dfrac{3-a}{2}$

M-28. Koliko različitih realnih rješenja ima jednadžba $x^5-x^3-2x=0$?
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

M-29. Ako je $z=i(1+i\sqrt{3})^5(1-i)^{-10}$ tada $|z|$ iznosi
A. 2 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

M-30. Pravac koji je okomit na pravac $x-y=0$ i prolazi desnim žarištem elipse $16x^2+25y^2=400$ ima jednadžbu
A. $x-y+3=0$ **B.** $x-y-3=0$ **C.** $x+y-3=0$ **D.** $x+y+3=0$

M-31. Duljina zajedničke tetive kružnica $x^2 + y^2 = 4$ i $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ iznosi
A. $\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** 4 **D.** 3

M-32. Umnožak svih rješenja jednadžbe $\log_x 0.25 + \log_{0.5x} 4 = \log_{2x} 8$
A. $2^{\frac{-1}{3}}$ **B.** $2^{\frac{1}{3}}$ **C.** $2^{\frac{-5}{3}}$ **D.** $2^{\frac{5}{3}}$

M-33. Skup svih rješenja nejednadžbe $10^{x^2+2} < 1000^x$ je
A. $< 0, 1 >$ **B.** $< 1, 2 >$ **C.** $< -1, 0 >$ **D.** $< -2, -1 >$

M-34. Površina trapeza s osnovicama 14 i 10 te krakovima 15 i 13 iznosi
A. 190 **B.** 195 **C.** 140 **D.** 144

M-35. Ako je volumen tijela nastalog rotacijom kvadrata oko njegove dijagonale $1\,\mathrm{m}^2$ tada volumen nastalog rotacijom tog kvadrata oko njegove stranice iznosi
A. $2\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$ **B.** $3\sqrt{2}\,\mathrm{m}^2$ **C.** $3\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$ **D.** $2\sqrt{2}\,\mathrm{m}^2$

M-36. Oplošja dviju kocki odnose se kao $2:3$. Ako je volumen manje kocke $8\,\mathrm{cm}^3$ tada brid veće kocke iznosi
A. $\sqrt{6}$ **B.** 3 **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{3}$

M-37. Koliko brojeva iz skupa $\{1,2,3,\ldots,999,1\,000\}$ u svom zapisu ne sadrži znamenku 0?
A. 919 **B.** 900 **C.** 819 **D.** 800

M-38. Tokom ove godine cijena proizvoda X povećana je dva puta: u veljači za 5% te u svibnju za 8%. Kolika je bila cijena proizvoda X početkom godine ako sada iznosi 164 kune i 43 lipe?
A. 144 kune i 20 lipa **B.** 145 kuna **C.** 145 kune i 20 lipa **D.** 146 kuna

M-39. Glavnica uložena u banku uz godišnje, dekurzivne i složene kamate za pet se godina udvostruči. Koji godišnji kamatnjak je primijenila banka?
A. 13.87% **B.** 14.87% **C.** 15.87% **D.** 16.87%

M-40. Ako 25 eura vrijedi 185 kuna a 35 dolara 217 kuna, koliko eura vrijedi 37 dolara?
A. 31 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 34

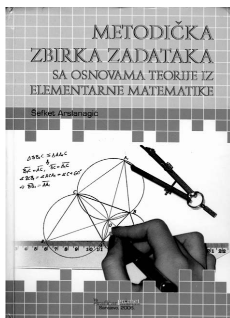
Rješenja zadataka

M–1	D	M–2	C	M–3	C	M–4	A
M–5	B	M–6	C	M–7	B	M–8	D
M–9	C	M–10	C	M–11	A	M–12	B
M–13	B	M–14	C	M–15	C	M–16	D
M–17	A	M–18	D	M–19	D	M–20	B
M–21	D	M–22	A	M–23	C	M–24	A
F–25	B	F–26	B	F–27	C	F–28	C
F–29	D	F–30	D	F–31	C	F–32	B
F–33	D	F–34	A	F–35	D	F–36	A
F–37	B	F–38	C	F–39	C	F–40	A



NOVE KNJIGE

Šefket Arslanagić, Metodička zbirka zadataka s osnovama teorije iz elementarne matematike, Grafičar promet d.o.o. Sarajevo, 352 str.



Autor ovog nezaobilaznog priručnika iz kolegija Elementarne matematike na prvoj godini i kolegija Metodike nastave matematike na trećoj godini na nastavničkom smjeru studija matematike u Sarajevu, od 1967. do 1993. godine bio je profesor matematike u Školskom centru u Trebinju. Potom je do 1996. g. radio u Danskoj, pa zatim u Berlinu, u školama za nadarenu djecu bosanskih prognanika kao i s nadarenim učenicima berlinske gimnazije. Vrativši se u Sarajevo, od 1996. g. bio je asistent na Odjelu za matematiku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, a od 1999. g. je docent, da bi sada kao izvanredni profesor predavao nekoliko kolegija na fakultetima u Sarajevu, Tuzli i Mostaru. Koliko je opsežno njegovo veliko znanje i iskustvo, vidi se u njegovih dosad izdanih 30 znanstvenih radova, 270 stručnih radova i 18 knjiga. S Matematičko-fizičkim listom surađuje već četrdeset godina. Posljednja mu je knjiga namijenjena, prije svega, studentima matematike – budućim profesorima matematike u srednjim školama. Knjiga ima šest poglavlja:

1. Algebra (algebarske nejednakosti),
2. Geometrija i analitička geometrija,
3. Trigonometrija,
4. Teorija brojeva,
5. Problem maksimuma i minimuma u elementarnoj matematici,
6. Razno.

U prvom dokazuje razne algebarske nejednakosti (Jensenova nejednakost, nejednakost Schwartz-Cauchy-Bunjakovskog, Hadviger-Finslerova nejednakost), koje se koriste i za dokazivanje nekih drugih. Drugo je posvećeno geometriji, posebno konstrukcijama pomoću ravnala i šestara, samo pomoću šestara, odnosno, samo pomoću ravnala. Neke značajne teoreme iz geometrije dokazuje i pomoću analitičke geometrije. U trećem su dani dokazi nekih trigonometrijskih nejednakosti, a bavi se i primjenom trigonometrije kod rješavanja nekih jednadžbi i sistema jednadžbi. Četvrto je posvećeno nekim poznatim, klasičnim teoremima iz teorije brojeva. U petom se elementarnim metodama određuju ekstremne vrijednosti nekih funkcija. U posljednjem su još neke zanimljive teme: matematička indukcija, harmonijski brojevi i dr. Svako poglavlje je popraćeno dodatnom literaturom, a mnoga i zadacima za vježbu. Posebno je interesantno što se neke tvrdnje dokazuju na više načina. Iako je knjiga namijenjena, prije svega, studentima matematike, zasigurno će biti korisna onim učenicima koji pokazuju veći interes za ovo područje, a posebno onima koji sudjeluju na matematičkim natjecanjima. Nastavnici će je moći koristiti kod pripreme za rad s grupama nadarenih matematičara.

Željko Hanjš, Zagreb

Međunarodne matematičke olimoijade. Zbirka riješenih zadataka. Priredio Željko Hanjš, *2., prošireno izdanje,* Element, Zagreb, 2006., 268 str.



Razveselila me je vijest, da je *Element* objavio drugo izdanje knjige *Međunarodne matematičke olimpijade.* Od prvog izdanja je proteklo već devet godina, i održano sljedećih devet Međunarodnih matematičkih olimpijada (MMO) – i knjiga je narasla sa 193 na 268 stranica!

Ali nije kvantiteta glavna odlika ove knjige, nego je to njena kvaliteta: svi zadaci su pomno riješeni, mnogi na više različitih načina, što naravno omogućava čitaocu da savlada različite tehnike (i trikove) rješavanja zadataka na olimpijskom nivou, kao i da još potpunije doživi ljepotu matematike. Doživljaju ljepote pomaže i autorov stil – i to što očito piše s velikom ljubavlju prema toj vrsti matematike (a i s očitim razumijevanjem i dubokim poznavanjem). Sve su to bile odlike već prvog izdanja, a u drugom su još više došle do izražaja.

U knjizi su navedeni i riješeni svi zadaci sa svih 46. dosadašnjih međunarodnih matematičkih olimpijada (kao i zadaci s međunarodnog natjecanja održanog u Luksemburgu 1980. godine, kada se nije našao organizator za olimpijadu). Uz to, knjiga sadrži zanimljive podatke o samim olimpijadama, uključujući i podrobne podatke o sudjelovanju hrvatskih učenika na MMO. Knjiga je lijepo opremljena, s puno ilustracija i tiskana na način koji olakšava čitanje.

Slažem se s autorom kada kaže: "Ova knjiga bit će od koristi i budućim natjecateljima, od kojih će neki imati priliku posjetiti i barem malo upoznati neke od sljedećih država: Sloveniju (2006.), Vijetnam (2007.), Španjolsku (2008.), Njemačku (2009.), ..." (to su države u kojima će se spomenutih godina održati MMO). Ali siguran sam da će biti korisna i zanimljiva i mnogo široj publici nego što su budući olimpijci – učenicima, nastavnicima, matematičarima, studentima. Ukratko: svima koji vole matematiku i koje će veseliti da upoznaju nove matematičke krajobraze.

Uroš Milutinović, Maribor

Anđelko Marić, Četverokut, Elementarna matematika 31, Element, 2006.



Evo još jedne vrijedne knjige istaknutog profesora Marića. *Četverokut (definicije, poučci, formule, primjeri, zadatci)*, dugo najavljivan od jednog drugog nakladnika, pojavio se u prepoznatljivoj Elementovoj nakladi, u ediciji "Elementarna matematika". Kako smo već navikli, od ovog autora, na početku se britko navode bitne definicije, poučci, formule i primjeri, u nastavku su birani zadatci, a završava se temeljitim rješenjima (katkad i s više njih). Kao i do sada, kad god je bilo moguće, ponuđeno je planimetrijsko rješenje. Iznimno se koriste vektori ili trigonometrija.

U ovoj nevelikoj knjižici možete naći gotovo sve o trapezu, paralelogramu, tetivnom, tangencijalnom i općem četverokutu na srednjoškolskoj razini. Mnogi važni, ali nedovoljno poznati poučci, precizno su izrečeni i dokazani. Ovime nije završeno autorovo bavljenje geometrijom u osnovnoj i srednjoj školi, već je najavljena i nova knjiga.

Jeste li znali da se od stranica bilo kojega četverokuta može složiti trapez ili tetivni četverokut? Jeste li znali da se od stranica nekog četverokuta s okomitim dijagonalama slaganjem uvijek dobije četverokut s okomitim dijagonalama? Te i mnoge druge zanimljive činjenice saznat ćete u ovoj knjižici. Preporučujem je svima koje zanima matematika. Elementu pohvala za brzo i profesionalno obavljen posao, a profesoru Mariću čestitka uz želje da nastavi svoju važnu misiju.

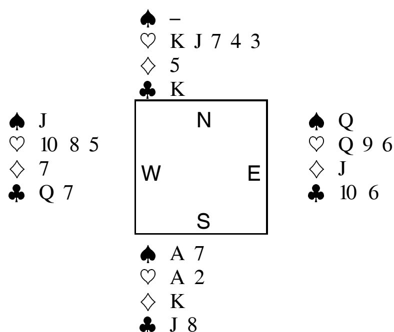
Ivica Gusić, Zagreb



U svakoj bridž partiji, igrač nasuprot izvođaču nakon atake svoje karte polaže na stol licem prema gore. On više ne sudjeluje u nastavku partije. Zato se naziva *mrtvacem* (engl. *dummy*).

Kao što šah posjeduje svoje *probleme*, tako i bridž posjeduje svoje *double dummy* probleme. Tu su sva četiri lista vidljiva, a od rješavača se traži da riješi problem, uz pretpostavljenu optimalnu igru izvođača i obrane. Iako su sve karte vidljive, rješavanje ovih problema predstavlja ponekad izuzetno težak zadatak, u kojem do izražaja dolazi sposobnost kombiniranja i imaginacije rješavača. Ovaj puta izabrao sam tri problema iz knjige *Bridge magic* Hougha Darwena.

Za početak, dva jednostavnija, s manjim brojem karata.

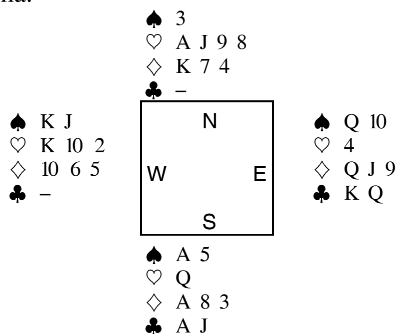


Adut je karo. Na potezu je **S**, koji mora osvojiti svih sedam štihova.

Prije nego pročitate rješenje, pokušajte riješiti sami ovaj problem!

Izvođač vidi dva pik štiha, dva herc štiha, karo štih i tref štih. Posljednji, sedmi, dobit će ako poreže drugi tref adutom na stolu. Da bi taj plan realizirao, nedostaje mu ulaz u ruku. Naime, ako odigra tref, u ruku se može vratiti samo herc asem i nakon što poreže drugi tref, nema više povratka da bi odigrao kralja karo.

Da bi riješio taj problem, odigrat će pik asa i na njega baciti kralja tref! Nakon toga igra dečka tref na koji **W** mora staviti damu a **N** će porezati. Vratit će se hercom u ruku, odigrati karo asa a zatim pik. U tom trenutku **W** je *stisnut* u dvije boje, hercu i trefu i nema dobrog poteza. Što god odigra, izvođač će uzeti posljednja dva štiha.

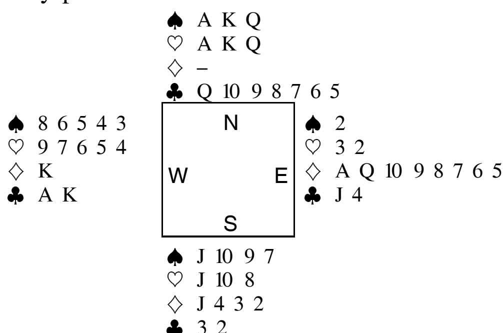


Adut je herc. Na potezu je **S** koji mora osvojiti sve štihove.

Provjerite svoje rješenje:

S će odigrati damu herc. Najbolja obrana za **W**-a je da pokrije kraljem. Izvođač će pikom ponovo doći u ruku. Zatim igra asa tref. Nastavak ovisi o odgovoru **W**-a. Ako on baci karo, to će učiniti i izvođač. Porezat će pik, odigrat će karo kralja, karo do asa i zatim posljednji karo. **W** mora rezati prije stola. Ako asa tref **W** poreže, izvođač će nadrezati i odigrati herc dečka na koji će baciti mali karo, a zatim posljednjeg aduta. Oba protivnika su u nevoljama i ne mogu zadržati svoje ključne karte. Analizirajte sve nastavke!

Na kraju, jedan kompletan double-dummy problem.



S je izvođač i treba napraviti 3NT (devet štihova u igri bez aduta). Ataka je ♢K.

(Mala pomoć. Za obranu je najbolje da **E** pretuče karo kralja u prvom štihu i nastavi karo.)

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 173

Rješenje. Zbroj S ćemo prikazati kao kombinaciju lijevih strana ovih jednadžbi. Nađimo konstante a, b i c tako da vrijedi

$$an^2 + b(n+1)^2 + c(n+2)^2 = (n+3)^2$$

za pozitivne cijele brojeve $n \leqslant 7$. Potražimo rješenje jednadžbe

$$(a+b+c)n^2 + (2b+4c)n + (b+4c) = n^2 + 6n + 9,$$

tj. sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1, \\ 2b+4c &= 6, \\ b+4c &= 9. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo $b = -3$, $c = 3$ i $a = 1$ (za svaki prirodan broj n). Prema tome, iz desnih strana danih jednadžbi dobivamo

$$S = a \cdot 1 + b \cdot 12 + c \cdot 123 = 1 - 36 + 369 = 334.$$

Knjigom Ž. Hanjš, Međunarodne matematičke olimpijade, su nagrađeni sljedeći učenici:

1. *Igor Boban* (2), III. gimnazija, Split; 2. *Mislav Cvitković* (4), Franjevačka klasična gimnazija, Sinj; 3. *Ervin Duraković* (3), Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka; 4. *Ivo Ivanšević* (4), III. gimnazija, Split; 5. *Goran Šeketa* (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac. 6. *Marina Škaričić* (4), IV. gimnazija Marka Marulića, Split. 7. *Jasna Vilić* (4), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina.

Riješili zadatke iz br. 2/222

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Mislav Cvitković* (4), Franjevačka klasična gimnazija, Sinj, 2965, 2967, 2973, 2975; *Goran Šeketa* (2), Gimnazija "Karlovac", Karlovac, 2972; *Marina Škaričić* (4), IV. gimnazija Marka Marulića, Split, 2967, 2973; *Jasna Vilić* (4), II. gimnazija, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2965, 2967, 2972, 2973, 2975, 2978.

b) Iz fizike: *Marija Čelar* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 238 – 241; *Vanja Ubović* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje, 238 – 241, 237; *Mislav Cvitković* (4), Franjevačka klasična gimnazija, Sinj, 1328.

SADRŽAJ LVI. GODIŠTA

1. ČLANCI IZ MATEMATIKE

2. ČLANCI IZ FIZIKE

3. IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

4. ASTRONOMIJA

5. ZABAVNA MATEMATIKA

6. ZADACI I RJEŠENJA

7. ZANIMLJIVOSTI

8. NOVOSTI IZ ZNANOSTI

9. KVALIFIKACIJSKI ISPITI

10. NOVE KNJIGE

11. NAGRADNI NATJEČAJ

Srednja, dvostruka stranica

Zadnja strana omota

Nagradni natječaj br. 175

U kvadratu *ABCD* nad stranicom AB s njegove unutarnje strane konstruiran je jednakokračan trokut *ABE* s kutovima uz bazu jednakim 15°. Dokažite da je trokut *CDE* jednakostraničan.

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko-fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.
Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.
Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.
Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.
Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).
Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.
Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.
Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.